

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E
AMBIENTAL**

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
COM ELEMENTOS DE JUNTA NA PREVISÃO DO
COMPORTAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO
ARMADO**

FELLIPE SOUSA LOPES

ORIENTADOR: RAÚL DARÍO DURAND FARFÁN

**MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM
ESTRUTURAS**

BRASÍLIA / DF: JULHO / 2016

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E
AMBIENTAL

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
COM ELEMENTOS DE JUNTA NA PREVISÃO DO
COMPORTAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO
ARMADO

FELLIPE SOUSA LOPES

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:

RAUL DÁRIO DURAND FARFAN, DSc Eng. Civil - UnB
(ORIENTADOR)

WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA, DSc Eng. Civil - UnB
(EXAMINADOR INTERNO)

MARCOS HONORATO DE OLIVEIRA, DSc Eng. Civil - UnB
(EXAMINADOR EXTERNO)

BRASÍLIA/DF, 06 de JULHO de 2016.

FICHA CATALOGRÁFICA

LOPES, FELLIPE SOUSA

Aplicação do método dos elementos finitos com elementos de junta na previsão do comportamento de estruturas de concreto armado. [Distrito Federal] 2016.

ix, 82 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2016)

Monografia de Projeto Final - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Concreto armado

2. Elementos finitos

3. Dimensionamento de vigas

4. Análise numérica

I. ENC/FT/UnB

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LOPES, F. S. (2016). Aplicação do método dos elementos finitos com elementos de junta na previsão do comportamento de estruturas de concreto armado. Monografia de Projeto Final, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 82 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Fellipe Sousa Lopes

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Aplicação do método dos elementos finitos com elementos de junta na previsão do comportamento de estruturas de concreto armado.

GRAU / ANO: Bacharel em Engenharia Civil / 2016

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Fellipe Sousa Lopes

Brasília/DF – Brasil

RESUMO

O presente trabalho estuda o comportamento de vigas de concreto armado através uma abordagem numérica, utilizando-se do Método dos Elementos Finitos (MEF). Inicialmente, uma revisão bibliográfica apresenta um resumo teórica acerca do MEF descreve uma breve história das primeiras e principais aplicações do método às estruturas de concreto armado, e ainda, os modelos mais atuais que foram aplicados neste trabalho.

A modelagem da armadura das estruturas é feita através de um método proposto por Durand (2008) e aperfeiçoado por Durand & Farias (2012), denominado Método Semi-Embutido. Este método representa as barras de aço dentro da estrutura de concreto e sua modelagem numérica, assim como as condições para o funcionamento do método e as definições dos modelos constituintes de aço, do concreto e da interface serão abordadas nesse estudo. Nesse trabalho, também é introduzido um elemento de junta na interface concreto-concreto, de modo a simular a não-linearidade do comportamento de estruturas de concreto. Esta abordagem permite também prever o surgimento de fissuras no concreto.

A aplicação do método semi-embutido conjuntamente com o uso de elementos de junta é estudada através da simulação de ensaios experimentais bastante difundidos na literatura e utilizados na verificação de modelos numéricos. Neste sentido, as vigas biapoiadas estudadas por Leonhardt & Walther (1962) e Bresler & Scordelis (1963) foram escolhidas. Nesse trabalho, elas são simuladas computacionalmente e seus resultados são analisados e comparados com os resultados experimentais.

As análises das estruturas de concreto armado são obtidas por meio da utilização da biblioteca de elementos finitos FemLab. O programa foi escrito na linguagem de programação *Julia*, que é uma linguagem dinâmica de alto nível, apropriada para computação numérica e científica.

Os estudos realizados neste trabalho mostraram a aplicabilidade dos métodos acima mencionados na simulação de estruturas de concreto armado. Os resultados obtidos mostraram boa correlação com os resultados experimentais, apesar das simplificações aqui adotadas, como a modelagem do concreto e a resistência da junta ao cisalhamento como elástico-linear.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELA	x
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVO	3
1.1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	3
1.2 ESCOPO DO TRABALHO.....	3
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
2.1 CONCRETO ARMADO	5
2.2 DIMENSIONAMENTO DE VIGAS À FLEXÃO E CORTANTE.....	6
2.2.1 ESTÁDIOS DE RUPTURA	7
2.2.2 MODOS DE RUPTURA	8
2.2.3 HIPÓTESES BÁSICAS DE DIMENSIONAMENTO:	9
2.2.4 DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÕES DAS SEÇÕES NO ESTADO LIMITE ÚLTIMO.....	12
2.2.5 DIMENSIONAMENTO DE VIGAS COM ARMADURA SIMPLES	14
2.2.6 DIMENSIONAMENTO DE VIGAS COM ARMADURA DUPLA	16
2.2.7 DIMENSIONAMENTO DE VIGAS À FORÇA CORTANTE.....	18
2.3 MÉTODOS DO ELEMENTOS FINITOS	24
2.3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	27
2.4 ANÁLISE DE ESTRUTURA DE CONCRETO ARMADO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	33
3 ANÁLISE NÚMERICA	36
3.1 MODELAGEM CONSTITUTIVA	36
3.1.1 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE MOHR-COULOMB.....	36
3.1.2 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE DRUCKER-PRAGER.....	37

3.1.3	MODELO UNIAXIAL ELÁSTICO-PERFEITAMENTE-PLÁSTICO	37
3.1.4	MODELO ELÁSTICO LINEAR	38
3.2	MÉTODO HOMOGENEIZADO	39
3.3	MÉTODO DISCRETO	39
3.4	MÉTODO EMBUTIDO	40
3.5	MÉTODO SEMI-EMBUTIDO	41
3.6	ELEMENTOS DE JUNTA.....	42
3.6.1	ELEMENTOS DE JUNTA PARA A INTERFACE AÇO-CONCRETO	44
3.6.2	ELEMENTOS DE JUNTA PARA A INTERFACE CONCRETO-CONCRETO	48
3.6.3	MODELO CONSTITUTIVO DOS ELEMENTOS DE JUNTA PARA A INTERFACE CONCRETO-CONCRETO.....	51
4	ESTUDO DE CASOS.....	55
4.1	VIGAS DE BRESLER & SCORDELIS (1963).....	55
4.2	VIGAS DE LEONHARDT & WALTHER (1962)	58
5	MODELAGEM NUMÉRICA.....	60
5.1	VIGAS DE BRESLER & SCORDELIS (1963).....	60
5.1.1	VIGAS A1, A2 E A3	61
5.1.2	VIGA B1.....	67
5.1.3	VIGA C2.....	69
5.1.4	VIGA OA1.....	71
5.2	VIGAS DE LEONHARDT & WALTHER (1962)	73
5.2.1	VIGA L1 E L2	74
6	CONCLUSÕES.....	78
	BIBLIOGRAFIA	80

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Viga de concreto simples (a) e armado (b) (Pfeil, 1989 <i>apud</i> Bastos, 2006).	6
Figura 2.2 - Viga bi apoiada submetida a duas cargas concentradas (Gontijo, 2012).....	7
Figura 2.3 - Viga de concreto armado submetida à flexão (a) Seção transversal, (b) Diagrama de deformações e (c) Diagramas de tensões para concreto $f_{ck} < 50MPa$ (Bastos, 2015).....	11
Figura 2.4 - Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva (NBR6118:2014).	11
Figura 2.5 - Diagrama tensão-deformação para aços de armadura ativa (NBR6118:2014).	12
Figura 2.6 - Domínios do estado-limite último de uma seção transversal (NBR6118:2014).	13
Figura 2.7 - Seção retangular com armadura dupla (Clímaco, 2008).....	17
Figura 2.8 – Modelo de funcionamento de uma viga de concreto segundo a treliça de Mörsch (Clímaco, 2008).....	19
Figura 2.9 – Equilíbrio de uma treliça de Mörsch em uma seção que corte uma diagonal comprimida (Clímaco, 2008).....	20
Figura 2.10 – Equilíbrio da Treliça de Morsch com uma seção cortando um diagonal tracionada (Clímaco, 2008).	22
Figura 2.11 – Malha de elementos finitos (Souza, 2003).....	25
Figura 2.12 - Diferentes tipos de elementos finitos (Souza, 2003).	26
Figura 2.13 – Esforços atuantes em um volume diferencial.....	27
Figura 2.14 - Representação gráfica da aplicação regra de quadratura de Gauss-Legendre de 2 pontos (Maciel, 2013).....	31
Figura 2.15 - Pontos de integração (ou de Gauss) de um elemento hexaédrico (Gontijo, 2012).....	32
Figura 2.16 - Transformação entre o sistema de coordenadas local de integração e o sistema de coordenadas global (Hartl, 2002, modificado).	32
Figura 3.1- Curva tensão-deformação do modelo elástico perfeitamente plástico.....	37
Figura 3.2 – Método homogeneizado (Azimi <i>et al.</i> , 2015, modificado).	39
Figura 3.3 – Posição dos reforços com relação aos elementos sólidos numa análise pelo Método Discreto (Durand, 2008).....	40

Figura 3.4 – Posição dos reforços com relação aos elementos sólidos numa análise pelo Método Embutido (Durand, 2008).	40
Figura 3.5 – Comparação das malhas para o método discreto e método embutido (Durand & Farias, 2012).	41
Figura 3.6 – Discretização do Reforço (Durand & Farias, 2012, modificado).	42
Figura 3.7 – Elemento de Junta 3D.	43
Figura 3.8 - Interface sendo representada por elementos de mola (Durand, 2008).	45
Figura 3.9 – Elemento de junta especial (Durand & Farias, 2012, modificado).	45
Figura 3.10 - Relação tensão-deformação limitada pelo critério de ruptura de Mohr-Coulomb. a) no espaço $\tau x - uxr$; b) no espaço $\tau x - uxr - \sigma c$ (Durand & Farias, 2012, modificado).	46
Figura 3.11 - Curvas de tensão por deslocamento das barras com diferentes arranjos de anéis metálicos (Tastani & Pantazopoulou, 2002, <i>apud</i> Gontijo, 2012).	47
Figura 3.12 – Discretização de estrutura de concreto armado.	49
Figura 3.13 – Viga de concreto armada: (a) geometria (b) malha “grosseira” (c) malha “refinada” (Živaljić <i>et al.</i> , 2014)	49
Figura 3.14 – Gráfico carga-deslocamento	50
Figura 3.15 – Aparecimento de trincas: (a) malha “grosseira” (b) malha “refinada”	50
Figura 3.16 - Modelo de distribuição de tensão na fissura (Živaljić, <i>et al.</i> , 2014, modificado).	51
Figura 3.17 - Curva tensão de ligação/deslocamento.	52
Figura 4.1 – Seções transversais das vigas de Bresler & Scordelis (1963) (Vecchio & Shim, 2004, modificado)	56
Figura 4.2 – Configuração do ensaio das vigas de Bresler & Scordelis (Vecchio & Shim, 2004)	56
Figura 4.3 - Geometria e configuração das vigas Leonhardt & Walther (1962) (Malm, 2006).	58
Figura 4.4 - Seção transversal das vigas de Leonhardt & Walther (1962) (Malm, 2006).	58
Figura 4.5 - Padrão de fissuras observadas nas vigas ensaiadas, (a) Viga L1 e (b) Viga L2 (Leonhardt e Walther (1962) <i>apud</i> Malm, 2006).	59
Figura 5.1 – Modelagens das vigas OA1, A1, A2, A3, B1 e C2: Divisão do domínio em blocos utilizados para a discretização em elementos finitos.	60
Figura 5.2 – Malha de elementos finitos das vigas OA1, A1, A2, A3, B1 e C2.	60

Figura 5.3 - Diagrama de carga <i>versus</i> deslocamento para a viga A1.....	62
Figura 5.4 - Diagrama de carga <i>versus</i> deslocamento para a viga A2.....	63
Figura 5.5 - Diagrama de carga <i>versus</i> deslocamento para a viga A3.....	63
Figura 5.6 - Tensões axiais na armadura da viga A1.....	64
Figura 5.7 - Tensões axiais na armadura da viga A2.....	64
Figura 5.8 - Tensões axiais na armadura da viga A3.....	65
Figura 5.9 - Deslocamento <i>uz</i> da viga A1, em mm (a) e detalhe das trincas (b).	65
Figura 5.10 - Deslocamento <i>uz</i> da viga A2, em mm (a) e detalhe das trincas (b).	66
Figura 5.11 - Deslocamento <i>uz</i> da viga A3, em mm (a) e detalhe das trincas (b).	67
Figura 5.12 - Diagrama de carga <i>versus</i> deslocamento para a viga B1.....	67
Figura 5.13 - Deslocamento <i>uz</i> da viga B1, em mm (a) e detalhe das trincas (b).	68
Figura 5.14 - Tensões axiais na armadura da viga B1.....	69
Figura 5.15 - Diagrama de carga <i>versus</i> deslocamento para a viga C2.....	69
Figura 5.16 - Deslocamento <i>uz</i> da viga C2, em mm (a) e detalhe das trincas (b).	70
Figura 5.17 - Tensões axiais na armadura da viga C2.....	70
Figura 5.18 - Diagrama de carga <i>versus</i> deslocamento para a viga OA1.....	71
Figura 5.19 – Deslocamento <i>uz</i> da viga OA1, em mm (a) e detalhe da trinca central (b).	72
Figura 5.20 - Tensões axiais na armadura da viga C2.....	72
Figura 5.21 - Modelagem das vigas L1 e L2: Divisão do domínio em blocos utilizados para a discretização em elementos finitos.	73
Figura 5.22 – Malha de elementos finitos das vigas L1 e L2	73
Figura 5.23 - Diagrama de carga <i>versus</i> deslocamento para a viga L2.	75
Figura 5.24 - Diagrama de carga <i>versus</i> deslocamento para a viga L2.	75
Figura 5.25 - Deslocamento <i>uz</i> da viga L1 em mm (comprimento de 1,45 m).	76
Figura 5.26 - Deslocamento <i>uz</i> da viga L2 em mm (comprimento de 1,95 m).	76
Figura 5.27 - Tensões axiais na armadura da viga L1.	76
Figura 5.28 - Tensões axiais na armadura da viga L2.	77

LISTA DE TABELA

Tabela 4.1 – Dimensões da viga de Bresler & Scordelis (1963) e suas armaduras.....	57
Tabela 4.2 – Propriedades da armadura das vigas de Bresler & Scordelis (1963).....	57
Tabela 4.3 – Propriedade do concreto das vigas de Bresler & Scordelis (1963)	57
Tabela 4.4 - Dimensões das vigas Leonhardt & Walther (1962)	59
Tabela 4.5 – Propriedade do concreto das vigas de Bresler & Scordelis (1963)	59
Tabela 5.1 – Carregamentos adotados nas vigas de Bresler & Scordelis (1963).....	61
Tabela 5.2 – Carregamentos adotados nas vigas L1 e L2	73

1 INTRODUÇÃO

A construção civil é de vital importância para a economia do país. Nesse contexto o concreto armado, que é um dos mais importantes materiais de construção do mundo e amplamente usado em diferentes tipos de estrutura, tem grande relevância. Para o seu uso estrutural o concreto deve satisfazer as seguintes condições:

- (1) A estrutura deve ser resistente e segura. Os cálculos estruturais devem levar em conta coeficientes de segurança próprios contra o colapso devido a cargas acidentais.
- (2) A estrutura deve parecer rígida e confiável. Deve-se garantir que os deslocamentos e fissuras da estrutura sob carregamentos de serviço estejam dentro dos limites aceitáveis.
- (3) A estrutura deve ser econômica. A estrutura deve ser bem dimensionada de modo a garantir a economicidade da mesma.
- (4) A estrutura deve ser durável. A estrutura deve ter um desempenho satisfatório para o qual aquele componente ou material foi projetado, mantendo assim, suas condições de resistência normais para o serviço empregado

Nessas circunstâncias, dado a importância de seu uso, o estudo de estruturas de concreto armado, bem como o desenvolvimento de normas técnicas, sempre foram importantes para a melhoria de seu desempenho. No Brasil, essas estruturas são dimensionadas de acordo com a ABNT – *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, especificamente a norma NBR 6118:2014 – *Projeto de Estruturas de Concreto – procedimento*.

Com o advento do uso de computadores, vários métodos e programas foram desenvolvidos para facilitar os cálculos e melhorar a precisão dos resultados em busca de dimensionamentos mais seguros e econômicos.

A ferramenta computacional é, por exemplo, de grande importância quando se quer garantir os critérios de serviço para os quais a estrutura de concreto armado foi dimensionada, como a previsão de flechas e fissuras sob determinado carregamento.

Há, entretanto, dificuldades no desenvolvimento de modelos analíticos de estruturas de concreto armado. Kwak & Filippou (1990) cita os seguintes fatores, como responsáveis por essas dificuldades:

- Concreto armado é composto de concreto e aço, dois materiais com comportamentos físicos e mecânicos bastante diferentes.
- O concreto tem um comportamento não-linear devido à alguns fatores como tempo de cura, fatores climáticos, fissurações, fluência, e outros.
- As barras de aço e o concreto interagem de forma bastante complexa, com mecanismo de aderência onde os deslocamentos de cada um não são necessariamente os mesmos.

Dentre as ferramentas existentes para a análise da estrutura com o uso de computadores está o Método dos Elementos Finitos, uma ferramenta de uso geral, eficaz e de alto desempenho e que permite complexas análises do comportamento não-linear.

O presente trabalho estuda o comportamento de vigas de concreto armado através uma abordagem numérica, utilizando-se desse método. A modelagem da armadura das estruturas é feita através de um método proposto por Durand (2008) e aperfeiçoado por Durand & Farias (2012), denominado Método Semi-Embutido. Nesse trabalho, é introduzido um elemento de junta na interface concreto-concreto, de modo a simular a não-linearidade do comportamento do concreto. A partir dessa abordagem, é possível prever o surgimento de fissuras no concreto.

A fim de estudar os modelos numéricos selecionados, escolheu-se simular ensaios experimentais bastante difundidos na literatura e utilizados na verificação de modelos numéricos. Dessa forma, selecionou-se as vigas biapoiadas de Leonhardt & Walther (1962) e Bresler & Scordelis (1963). Nesse trabalho elas são simuladas computacionalmente e seus resultados são analisados e comparados com os resultados experimentais.

1.1 OBJETIVO

Este trabalho tem por objetivo comparar os resultados obtidos a partir através do *software* FemLab, da aplicação de elementos finitos de junta no estudo do concreto armado, com resultados experimentais disponíveis na literatura.

1.1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Revisão acerca do dimensionamento de vigas de concreto armado;
- Revisão acerca da aplicação do MEF na análise de estruturas de concreto armado;
- Aplicação do MEF utilizando o método semi-embutido e elementos finitos de junta na análise de estruturas de concreto armado utilizando o *software* FemLab; e
- Comparação dos valores computacionais com os experimentos de Bresler & Scordelis (1963) e Leonhardt & Walther (1964).

1.2 ESCOPO DO TRABALHO

O presente trabalho está basicamente dividido em três partes, na primeira é apresentada uma revisão bibliográfica que servirá como base teórica para o projeto. Na segunda, são apresentados os casos de estudo e por último uma análise dos dados é apresentada.

O Capítulo 2 apresenta a teoria para o dimensionamento de vigas de concreto armado de acordo com a norma brasileira NBR 6118:2014. Uma revisão teórica acerca do Método dos Elementos Finitos, desde seus conceitos básicos até sua formulação.

A seguir, o Capítulo 3 apresenta métodos de modelagem de concreto armado, bem como a teoria necessária para estudo das interfaces aço-concreto e concreto-concreto.

Posteriormente, o Capítulo 4 apresenta os casos de estudo. As vigas a serem analisadas são detalhadas. Suas propriedades geométricas, bem como o valor dos parâmetros adotados são fornecidos.

Por fim, no Capítulo 5, os resultados obtidos são analisados através de uma comparação entre os valores obtidos e os esperados, estudos dos diagramas de tensão e discussões acerca de eventuais incompatibilidades.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentada uma revisão sobre o concreto armado, dimensionamento de vigas por flexão e cortante e o método dos elementos finitos aplicados ao concreto armado.

A revisão sobre o dimensionamento é dado apenas para fins de referência, uma vez que as técnicas utilizadas nesse trabalho poderiam ser úteis no auxílio do dimensionamento de vigas de concreto armado. Conceitos importantes necessários para o entendimento do comportamento da viga, como estádios de flexão e modos de ruptura também são abordados nessa parte.

Já o método dos elementos finitos é apresentado, junto com a formulação matemática do mesmo, de maneira a possibilitar o entendimento do método que é utilizado nesse trabalho.

2.1 CONCRETO ARMADO

Apesar de não ser nem tão resistente, nem tão tenaz quanto o aço, o concreto é o material de construção mais utilizado no mundo (IBRACON, 2009). Alguns fatores podem explicar tamanha popularidade. Dentre estes fatores, podem ser citados:

- Versatilidade, que é a facilidade de produção e manejo e a facilidade de ser moldado na forma desejada;
- Durabilidade, que está ligado com o desempenho satisfatório para qual ele foi projetado; e
- Economia, já que é um material relativamente barato e atende bem às necessidades do usuário.

A resistência à tração do concreto, entretanto, são extremamente baixas, quando comparadas com a resistência à compressão. Dessa forma, coloca-se, no interior da peça estrutural de concreto, armaduras de aço, de modo a resistir aos esforços de tração solicitantes. Essas estruturas de concreto que possuem aço em seu interior são chamados de concreto armado e, quando bem dimensionadas, resistem a todos os esforços aos quais as estruturas estão submetidas de maneira eficaz e econômica.

A contribuição da armadura numa estrutura de concreto fica exemplificada quando se tem uma viga de concreto simples submetida à flexão que rompe bruscamente quando a tensão de tração do concreto é alcançada, resultando no aparecimento de fissuras na borda tracionada. No caso da Figura 2.1b, onde a armadura está na zona de tração da viga de concreto armado, o aço resiste as tensões de tração não resistidas pelo concreto nas regiões de fissuração, favorecendo para que a ruptura da viga não ocorra de maneira repentina e aumentando a resistência da estrutura.

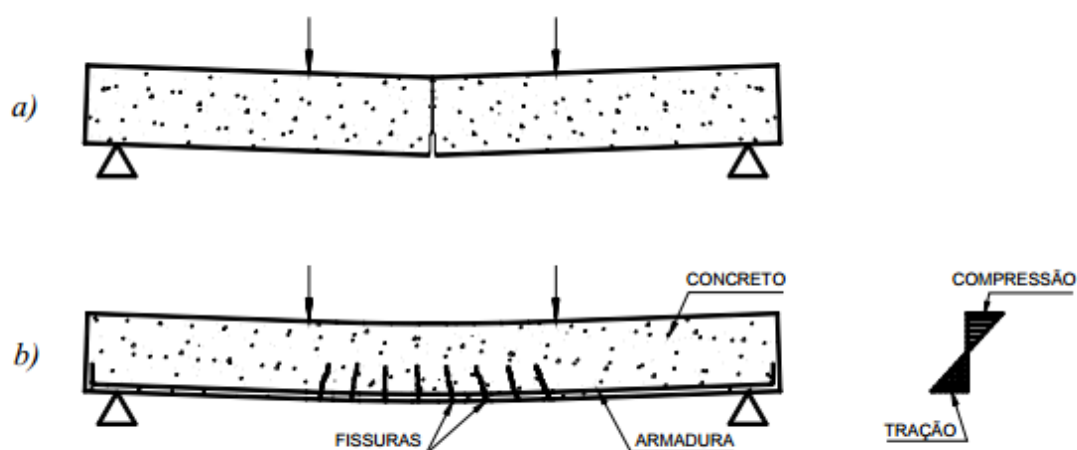


Figura 2.1 - Viga de concreto simples (a) e armado (b) (Pfeil, 1989 *apud* Bastos, 2006).

Essas características tornam o estudo do concreto armado bastante significativas e de extrema importância, sejam elas pensando no concreto como elemento estrutural, ou como um material de construção.

No Brasil, projeto de estruturas de concreto armado é feito de acordo com a norma NBR 6118:2014.

2.2 DIMENSIONAMENTO DE VIGAS À FLEXÃO E CORTANTE

De acordo com a NBR 6118:2014 (item 14.4.1.1), vigas são elementos lineares em que a flexão é preponderante. Nesses elementos, a atuação de momentos fletores, que produzem tensões normais na seção transversal e a sua rotação caracteriza a sua flexão.

De acordo com os esforços solicitantes que atuam na seção transversal, a flexão pode ser classificada como:

- Flexão pura: quando uma viga está submetida apenas ao momento fletor, não existindo assim, força transversal, seja ela de compressão ou de tração.
- Flexão simples: quando uma viga está submetida apenas ao momento fletor e a força cortante, não existindo assim, força transversal, seja ela de compressão ou de tração.
- Flexão composta: quando a viga está submetida ao momento fletor e a força transversal, produzindo tensões normais na seção.

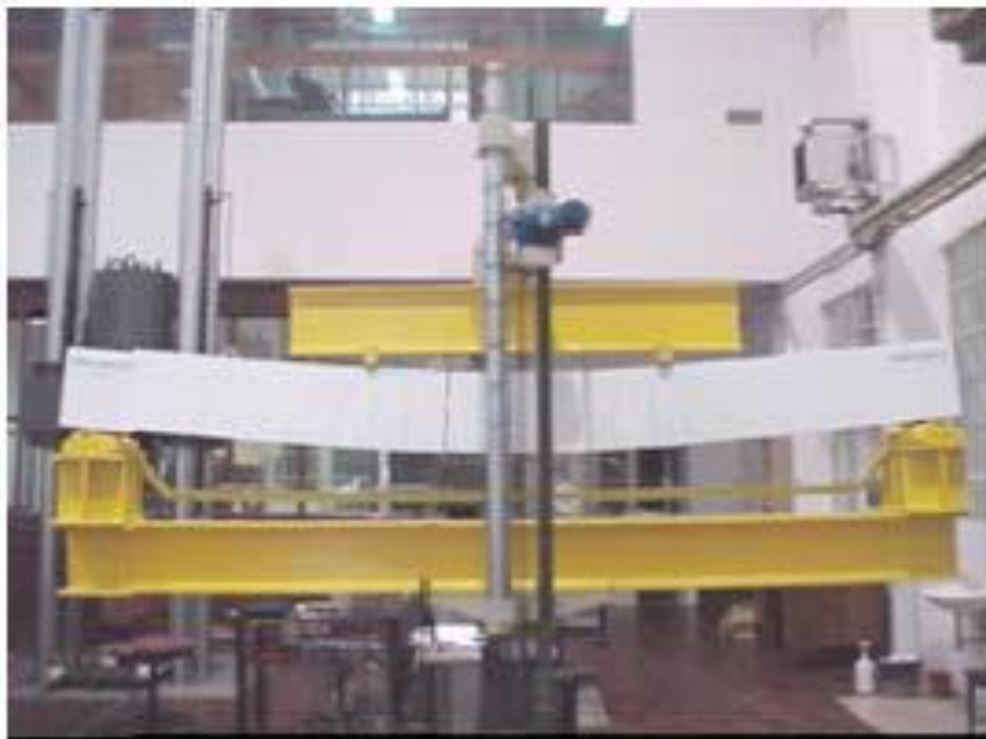


Figura 2.2 - Viga bi apoiada submetida a duas cargas concentradas (Gontijo, 2012).

2.2.1 ESTÁDIOS DE FLEXÃO

Quando uma viga de concreto armado é submetida a um ensaio de flexão, à medida que o carregamento assume valores crescentes, é possível observar e medir diferentes grandezas, à medida que as distribuições de tensões na viga se altera. De acordo com Clímaco (2005), os estádios podem ser definidos como:

- Estádio I: Corresponde à fase inicial do ensaio, para valores do momento fletor não muito grandes. Nessa fase, as tensões normais variam linearmente em relação a sua linha neutra. Na zona de tração da peça, a tensão máxima é inferior a resistência da tração do concreto, e a tensão máxima na zona de compressão é muito inferior à resistência à compressão do concreto
 - Estádio Ib: Alguns autores ainda definem esse estágio intermediário, chamado de Ib. Nessa fase, devido ao aumento nos valores das cargas, o aparecimento de fissuras é iminente e a zona submetida à tração sofre plastificação.
- Estádio II: Corresponde à fase em que a tração atuante na peça supera a capacidade do concreto de resistir a tração e a primeira fissura surge, transferindo, assim, as tensões de tração para a armadura longitudinal.
- Estádio III: Corresponde ao estágio final do estágio II em que a peça está na iminência de ruptura. Nesse estágio, pelo menos um dos materiais (concreto e aço) ultrapassa a fase elástica e inicia-se o comportamento plástico dos materiais. Este estágio indica a ruptura da peça, seja ela pelo esmagamento do concreto, escoamento do aço, ou ambos.

2.2.2 MODOS DE RUPTURA

As vigas de concreto armado, quando submetidas a flexão pura, podem ser solicitadas além da sua capacidade de resistência, e, dependendo de como foi dimensionada, podem romper dos seguintes modos:

A ruptura é balanceada quando a peça rompe com o esmagamento do concreto e o escoamento do aço. A seção com esse modo de ruptura é denominado “subarmada”. Nesse modo de ruptura ambos os materiais atingem seus limites de resistência e a peça dá sinais de que vai romper, como com a ocorrência de flechas e/ou fissuras excessivas. Deve-se destacar, entretanto, que o termo “subarmada” não significa que a armadura foi insuficiente, uma vez que a ruptura não ocorreu exclusivamente pelo escoamento do aço.

A ruptura é frágil à compressão quando a peça rompe com o esmagamento do concreto à compressão sem o escoamento do aço. A peça rompe devido ao encurtamento do concreto ultrapassar o seu limite de 3,5%. A seção com esse modo de

ruptura é denominado “superarmada” porque há armadura de tração em excesso. Nesse tipo de ruptura, a peça praticamente não dá sinais prévios de aviso. Os deslocamentos das flechas e as fissuras são pequenos em números e em valores.

A ruptura é frágil à tração quando a armadura é insuficiente para absorver as tensões de tração após a fissuração do concreto. O aço escoar rapidamente e ultrapassa o alongamento máximo de 10‰, podendo até mesmo romper. Esse tipo de ruptura é brusca e sem aviso.

2.2.3 HIPÓTESES BÁSICAS DE DIMENSIONAMENTO:

O dimensionamento de uma peça à flexão consiste, necessariamente, em duas etapas:

- a) Estabelecer as dimensões da seção transversal e área das armaduras, de forma que resista às cargas solicitadas com uma margem de segurança pré-estabelecida.
- b) Verificar o comportamento da peça nos Estados Limites de Serviço (flechas e fissuras) para um determinado momento fletor de serviço.

Algumas hipóteses são consideradas pela NBR 6118:2014 para o dimensionamento de uma peça à flexão. Essas hipóteses são:

- a) As seções transversais permanecem planas após as deformações de flexão e até a ruptura da peça;
- b) A deformação das barras de armadura passivas aderentes, em tração ou compressão deve ser o mesmo do concreto em seu entorno.
- c) Para armaduras não aderentes, os valores de acréscimos das tensões para estruturas usuais de edifícios estão apresentados a seguir:

- Para elemento com relação vão/altura útil igual ou menor que 35:

$$\Delta\sigma_p = 70 + f_{ck}/100\rho_p, \text{ em megapascal, não podendo ser maior que 420 Mpa}$$

- Para elemento com relação vão/altura útil maior que 35:

$$\Delta\sigma_p = 70 + f_{ck}/300\rho_p, \text{ em megapascal, não podendo ser maior que 210 Mpa}$$

Em que:

$$\rho_p = \frac{A_p}{b_c d_p} \quad (2.1)$$

$\Delta\sigma_p$ e f_{ck} são dados em megapascal (MPa);

ρ_p é a taxa geométrica da armadura ativa;

b_c é a largura da mesa de compressão;

d_p é altura última referida à armadura ativa.

- d) As tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, devem ser desprezadas no ELU;
- e) A distribuição de tensões no concreto é feita de acordo com o diagrama de parábola-retângulo. Esse diagrama pode ser simplificado pelo diagrama retângulo $y = \lambda x$, onde o parâmetro λ pode ser tomado como:

- $\lambda = 0,8$, para $f_{ck} \leq 50MPa$; ou
- $\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400$, para $f_{ck} > 50MPa$;

Em que a tensão na profundidade y pode ser considerada como:

- $\alpha_c \cdot f_{cd}$, no caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir a partir desta para a borda comprimida;
- $0,9\alpha_c \cdot f_{cd}$, caso contrário.

Em que α_c é definido como:

- $\alpha_c = 0,85$, para concretos com $f_{ck} < 50MPa$; e
- $\alpha_c = 0,85 \cdot [1,0 - (f_{ck} - 50)/200]$, para concretos com $f_{ck} > 50MPa$.

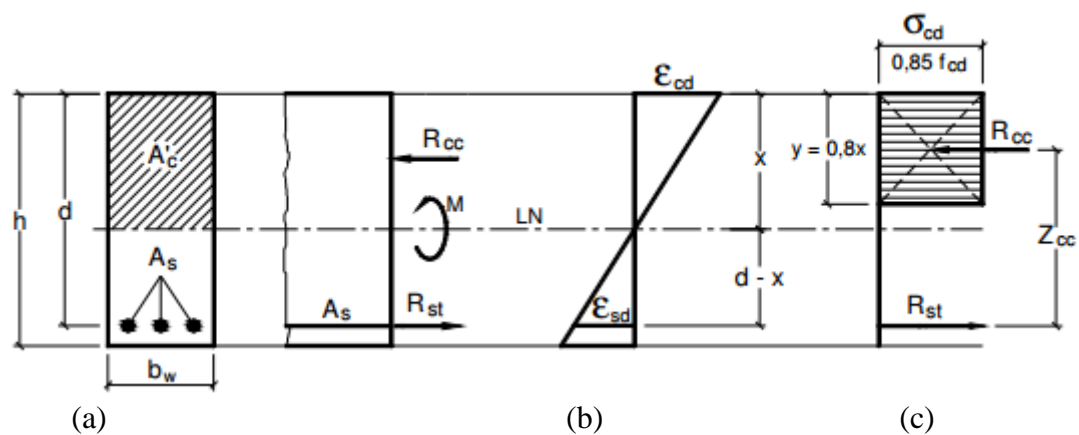


Figura 2.3 - Viga de concreto armado submetida à flexão (a) Seção transversal, (b) Diagrama de deformações e (c) Diagramas de tensões para concreto (Bastos, 2015).

- f) A tensão nas armaduras deve ser obtida a partir dos diagramas de tensão-deformação, com valores de cálculo definidos pelo diagrama de tensão deformação abaixo:

Para armadura passiva:

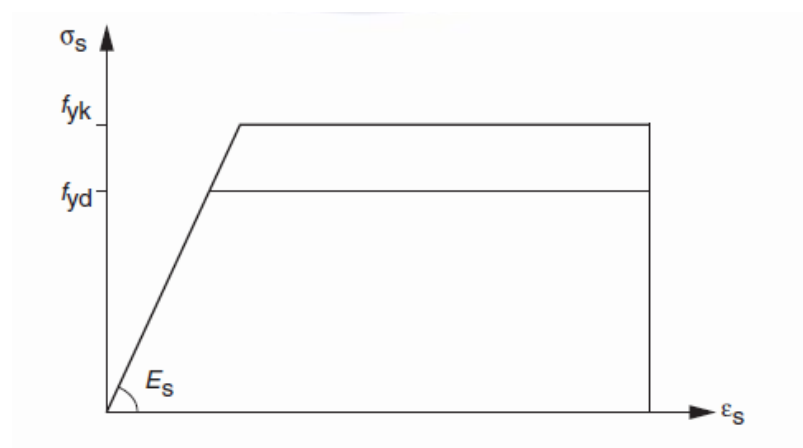


Figura 2.4 - Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva (NBR6118:2014).

Para armadura ativa:

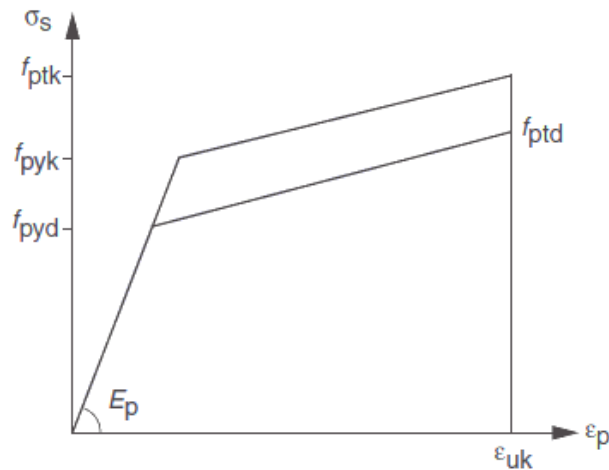


Figura 2.5 - Diagrama tensão-deformação para aços de armadura ativa (NBR6118:2014).

- g) O estado-limite último é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertence a um dos domínios definidos na Figura 2.6.

Esse trabalho analisará estruturas de concreto convencionais, assim, toda a formulação que virá a seguir, se dará para concretos com $f_{ck} < 50MPa$ e a largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminui a partir desta para a borda comprimida.

2.2.4 DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÕES DAS SEÇÕES NO ESTADO LIMITE ÚLTIMO

Denomina-se domínio de deformações como sendo o intervalo que compreende todas as possíveis tipos ruptura. Segundo a NBR 6118, esses domínios são mostrados na Figura 2.6 e são definidos como:

Ruptura convencional por deformação plástica excessiva:

- Domínio 1: Ruptura por tração não uniforme, sem compressão. Nesse domínio, a resistência do concreto à tração é desprezada e admite-se que a peça rompe quando o aço atinge o alongamento de 10‰, limite convencional de deformação plástica excessiva do aço.
- Domínio 2: A ruptura da peça se dá com o escoamento do aço atingindo o alongamento máximo convencional de 10‰, sem ruptura do concreto. A

diferença entre os domínios 1 e 2 é que no primeiro não há esforços de compressão no concreto, já no último há, apesar de não ser suficiente para esmagá-lo.

Ruptura convencional por encurtamento-limite do concreto

- Domínio 3: Ruptura da peça por flexão com o escoamento da armadura ocorrendo simultaneamente à ao esmagamento do concreto. A NBR 6118 define essas peças como subarmada. Nesse domínio, o aço atinge, necessariamente a sua tensão de escoamento e o concreto atinge sua encurtamento máximo de 3,5‰.
- Domínio 4: Nesse domínio, a ruptura da peça também se dá por flexão com o esmagamento do concreto. O aço, porém, apesar de estar tracionado, não escoá. A NBR 6118 define essas peças como superarmada.
 - Domínio 4a: ruptura por compressão excêntrica. Toda a seção e a armadura estão comprimidas, com exceção de uma pequena região tracionada, nas fibras abaixo da armadura.
- Domínio 5: Ruptura por compressão não uniforme, sem tração. A resultante da compressão está localizada no núcleo central de inércia e provoca o encurtamento acima do seu limite de 3,5‰.

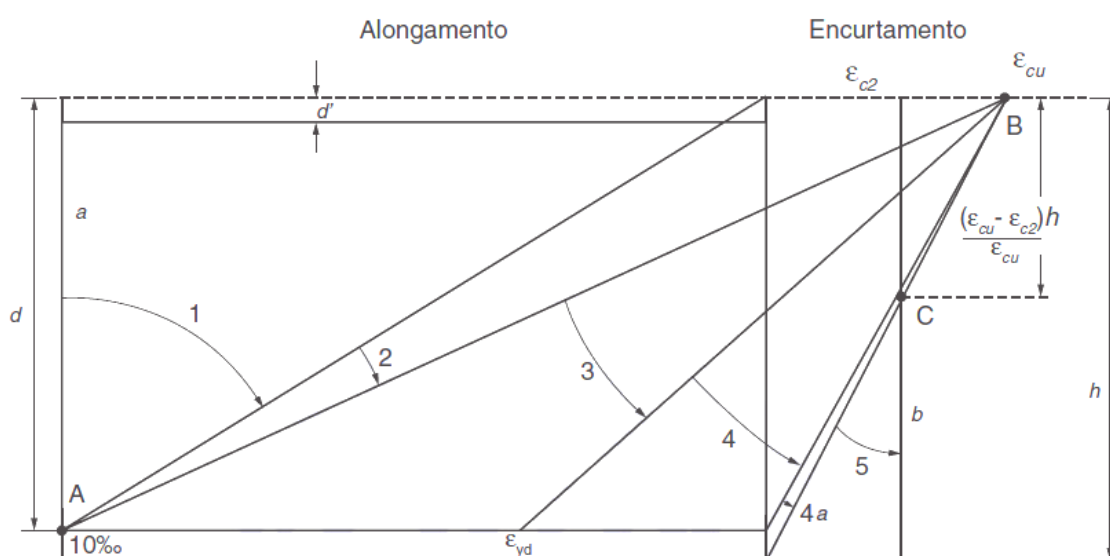


Figura 2.6 - Domínios do estado-limite último de uma seção transversal (NBR6118:2014).

No dimensionamento de vigas à flexão, só tem significado os domínios 2, 3 e 4, cujas associações às deformações específicas correspondem às deformações do aço e do concreto, o que representa uma associação eficiente dos materiais, ou seja, os dois estão resistindo aos esforços solicitantes da flexão.

Podemos, ainda, concluir que os dimensionamentos devem ser feitos preferencialmente nos domínios 2 e 3, pois deve-se evitar que a ruptura da peça ocorra pelo esmagamento do concreto, sem o escoamento do aço, por ser uma ruptura que acontece de maneira bruta, sem avisos. Para evitar que o dimensionamento ocorra no domínio 4, é comum que se aumente a altura da viga e, caso não seja possível aumentar a altura, coloca-se uma armadura de combate à compressão (denominada armadura dupla) na zona submetida à compressão.

2.2.5 DIMENSIONAMENTO DE VIGAS COM ARMADURA SIMPLES

No dimensionamento de uma viga à flexão pura, diz-se que uma seção de concreto armado é dimensionada com armadura simples quando o cálculo à flexão mostra a necessidade apenas de armadura na zona de tração. Neste caso, a zona comprimida de concreto fornece uma reação de compressão (R_{cc}), que junto com a reação de tração da armadura presente na zona tracionada da viga (R_{st}), formam um binário, cujo momento (M_{Rd}) deve equilibrar o momento solicitante proveniente das ações (M_{Sd}). Esse esquema está representado na Figura 2.3.

Os princípios de dimensionamento de uma viga são:

- Compatibilidade de deformações: tendo por base a hipótese das seções planas;
- Equilíbrio das seções: impondo a condição de que o momento solicitante de cálculo ser igual ou inferior ao binário resistente.

Pela compatibilidade das deformações do aço e do concreto, tem-se:

$$\varepsilon_{sd} = \frac{d - x}{x} \varepsilon_{cd} = \frac{1 - x/d}{x/d} \varepsilon_{cd} \quad (2.2)$$

Por motivos práticos, é de interesse a formulação do coeficiente $k_x = x/d$, definido como altura ou profundidade relativa da linha neutra. Dessa forma:

$$\varepsilon_{sd} = \frac{1-k_x}{k_x} \varepsilon_{cd} \text{ e } \varepsilon_{cd} = \frac{k_x}{1-k_x} \varepsilon_{sd} \quad (2.3)$$

$$k_x = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{cd} + \varepsilon_{sd}} \quad (2.4)$$

Pela Figura 2.3 e sua condição de equilíbrio, conclui-se por que:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{cc} = R_{st} \quad (2.5)$$

O momento solicitante de cálculo (M_{sd}) deverá ser igual ou inferior ao momento resistente pelo binário dos esforços do aço e do concreto dado como:

$$M_{sd} \leq M_{Rd} = R_{cc} \cdot z = R_{st} \cdot z \quad (2.6)$$

A reação R_{cc} pode ser expressa como

$$R_{cc} = A_c \cdot \sigma_{cd} \quad (2.7)$$

Em que:

- A_c é a área de concreto comprimida;
- $\sigma_{cd} = 0,85f_{cd}$: Para os domínios 3 e 4;
- $\sigma_{cd} = 0,85\beta f_{cd}$: Para o domínio 2.

Em que β é o coeficiente de correlação da tensão de compressão no concreto, dado por:

$$2\text{‰} \leq \varepsilon_{cm\acute{a}x} \leq 3\text{‰} \Rightarrow \beta = 1,25 \left[1 - 0,67/\varepsilon_{cm\acute{a}x} \right] \quad (2.8)$$

$$0 \leq \varepsilon_{cm\acute{a}x} < 2\text{‰} \Rightarrow \beta = 0,59(\varepsilon_{cm\acute{a}x})^{1/2} \quad (2.9)$$

Da Equação 2.6 temos que:

$$M_{sd} = R_{cc} \cdot z = (\sigma_{cd} b_w y) \cdot (d - 0,4x) = (\sigma_{cd} b_w 0,8x)(1 - 0,4x) \quad (2.10)$$

Assim, resolvendo a equação em questão, temos que a posição da linha neutra é:

$$x = 1,25d \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_{sd}}{0,425b_w d^2 f_{cd}}} \right) \quad (2.11)$$

Tendo que a resultante da tração no aço é $R_{st} = A_s \cdot \sigma_{cd}$, podemos obter a área de aço necessária ao equilíbrio:

$$M_{sd} = R_{st} \cdot z = A_s \cdot \sigma_{cd} \cdot z$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{\sigma_{cd} \cdot (d - 0,4x)} \quad (2.12)$$

Em que

- A_s é a área de aço tracionada;
- Para os domínios 2 e 3: $\sigma_{sd} = f_{yd}$
- Para o domínio 4, onde σ_{sd} é calculado pela Equação 2.1 considerando o valor de $\sigma_{cd} = 3,5\%$.

2.2.6 DIMENSIONAMENTO DE VIGAS COM ARMADURA DUPLA

Como mencionado em 2.2.4, deve-se evitar o dimensionamento no domínio 4. A primeira alternativa é aumentar a altura da viga, para situar o cálculo nos domínios 3 ou 2, como seção subarmada.

Caso a altura da viga não possa ser aumentada, por alguma restrição do projeto de arquitetura, pode-se optar por uma opção de reforçar a zona comprimida do concreto, com a colocação de armadura de compressão, daí vem o nome “armadura dupla”.

A formulação matemática para o dimensionamento se dá da mesma forma que para armadura simples, através de equações de equilíbrio.

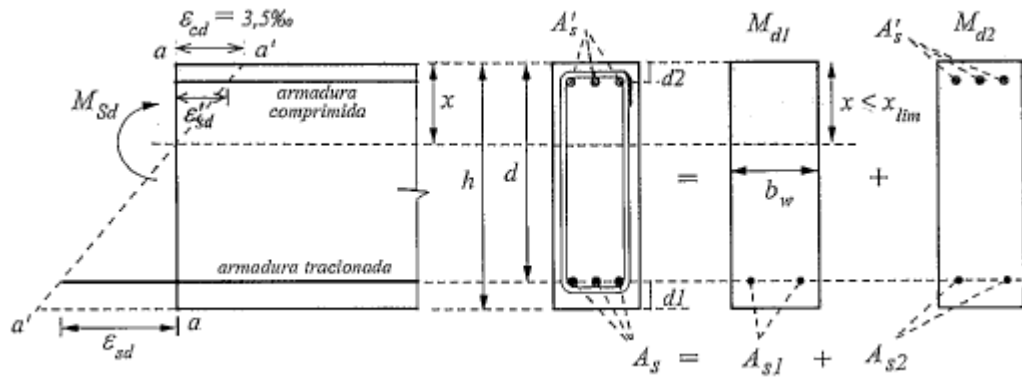


Figura 2.7 - Seção retangular com armadura dupla (Clímaco, 2008).

Em que,

- A'_s é a área de aço comprimida;
- d_2 é a distância do centro de gravidade das armaduras de compressão à fibra mais comprimida;
- R'_{st} é a resultante de força de compressão na armadura (A'_s); e
- ε'_{sd} é a deformação do aço à compressão de cálculo.

Assumindo que as deformações no concreto e no aço são compatíveis com os limites dos domínios 3 e 4 em uma viga com armadura simples, temos que a posição da linha neutra:

$$x = \frac{d \cdot \varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{cd} + \varepsilon_{sd}} \quad (2.13)$$

A partir das equações de equilíbrio na seção de viga dupla, temos que o momento solicitante:

$$M_{sd} = R_{cc} \cdot (d - 0,4x) + R'_{st} \cdot (d - d_2) \quad (2.14)$$

Em que a força resultante de compressão no concreto (R_{cc}) é definida como:

$$R_{cc} = A_c \cdot \sigma_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot 0,8 \cdot x \cdot b_w \quad (2.15)$$

A força resultante no aço submetido à compressão (R'_{st}) pode ser expressa como:

$$R'_{st} = \frac{M_{sd} - R_{cc} \cdot (d - 0,4x)}{d - d_2} \quad (2.16)$$

Já a força resultante no aço tracionado (R_{st}) é calculada a partir de:

$$R_{st} = R_{cc} + R'_{st} \quad (2.17)$$

A deformação no aço comprimido (ε'_{sd}) será de:

$$\varepsilon'_{sd} = 0,0035 \cdot \frac{x - d_2}{x} \quad (2.18)$$

E a tensão atuante nele é dado por:

$$\sigma'_{sd} = \varepsilon'_{sd} \cdot E_{sd} \leq f_{yd} \quad (2.19)$$

Assim, para o cálculo da área de aço à compressão (A'_s), utiliza-se:

$$A'_s = \frac{R'_{st}}{\sigma'_{sd}} \quad (2.20)$$

E para a área de aço tracionada, temos que:

$$A_s = \frac{R_{st}}{f_{yd}} \quad (2.21)$$

2.2.7 DIMENSIONAMENTO DE VIGAS À FORÇA CORTANTE

Os pesquisadores *Ritter* e *Mörsch* idealizaram um modelo para explicar a resistência de uma viga de concreto armado após a fissuração, no qual a viga tem um comportamento análogo a uma treliça. De acordo com esse modelo, o banzo superior constituído pelo concreto comprimido na flexão e o banzo inferior constituído pela armadura longitudinal de tração, as diagonais tracionadas pela armadura transversal e as diagonais comprimidas pelas bielas de concreto comprimida.

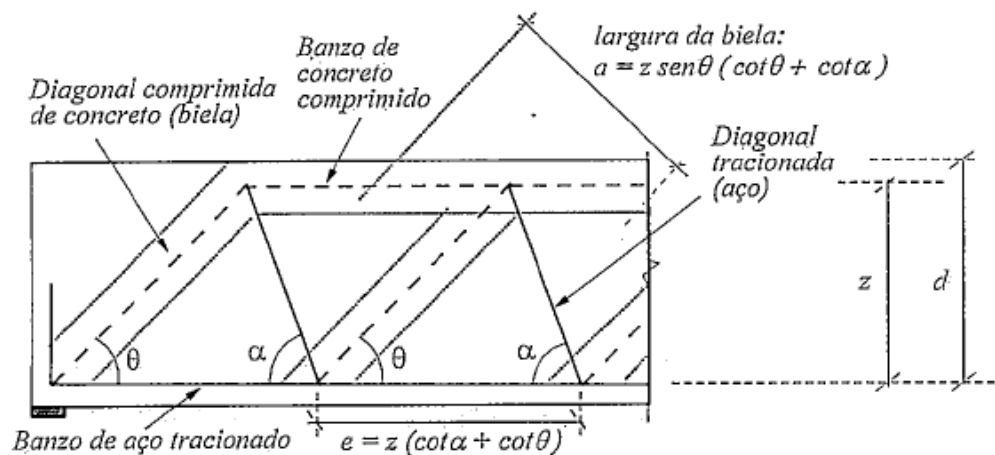


Figura 2.8 – Modelo de funcionamento de uma viga de concreto segundo a treliça de Morsch (Clímaco, 2008).

Os elementos do modelo da treliça de Morsch podem ser descritos das seguinte forma:

a) Diagonais tracionadas (armadura transversal)

São constituídas por barras de aço transversais ao eixo da peça, a 90° ou inclinadas. Na Figura 2.8, tem-se:

- α = ângulo de inclinação das barras com o eixo da peça: $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$;

- Para estribos a 90°: $\alpha = 90^\circ$
- Para barras da armadura principal, dobradas para combater a força cortante, usualmente, $\alpha = 45^\circ$

- $e = z(\cot \theta + \cot \alpha)$ = distância entre dois nós consecutivos da treliça.

b) Diagonais comprimidas (bielas de compressão do concreto)

Inicialmente, na proposta da treliça de Morsch, as diagonais comprimidas teriam a inclinação de 45° com o eixo da peça. Verificou-se, entretanto, que as armaduras transversais calculadas segundo essa hipótese resultam em superdimensionamento. Assim, com as diagonais comprimidas inclinadas em um ângulo inferior a 45°, tem-se uma economia na armadura transversal de tração. Na Figura 2.8, tem-se:

- θ = é o ângulo de inclinação das diagonais comprimidas em relação ao eixo longitudinal;
- $a = z \cdot \sin \theta \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)$ é a largura da diagonal comprimida;
- $b_w \cdot a$ é a área comprimida da diagonal na seção retangular.

A norma NBR 6118:2014, item 17.4, admite para elementos lineares dois modelos de cálculo “que pressupõem a analogia com modelo em treliça, de banzos paralelos, associados a mecanismos resistentes complementares desenvolvidos no interior do elemento estrutural e traduzidos por uma componente adicional V_c ”. O termo V_c é definido pela norma como “a parcela da força cortante resistida por mecanismos complementares ao modelo em treliça”. Os dois modelos de cálculo presentes na norma são:

- Modelo I: $\theta = 45^\circ$
- Modelo II: $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$

Aqui, abordaremos apenas o modelo II, por ser um modelo mais geral e, de acordo com Clímaco (2008), ele é compatível com a tendência internacional das normas.

2.2.7.1 VERIFICAÇÃO DAS BIELAS COMPRIMIDAS DE CONCRETO QUANTO AO ESMAGAMENTO

Analisaremos, para a verificação das bielas de concreto comprimidas quanto ao esmagamento, a treliça da Figura 2.9 através do método de Ritter, tomando uma seção que corte uma diagonal comprimida.

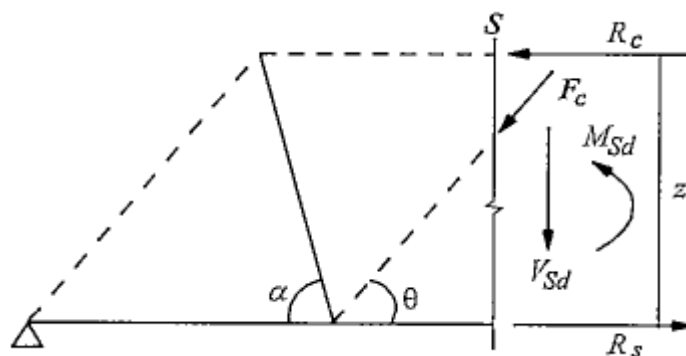


Figura 2.9 – Equilíbrio de uma treliça de Mörsch em uma seção que corte uma diagonal comprimida (Clímaco, 2008).

Do equilíbrio vertical da seção, temos:

$$\sigma_{cd} = \frac{V_{sd}}{0,9 \cdot b_w \cdot d} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)} \quad (2.22)$$

A norma 6118:2014, prescreve um processo simplificado para a verificação. De acordo com ela, a resistência do elemento estrutural quanto à diagonal comprimida do concreto é considerada satisfatória quando ela atende à seguinte condição:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (2.23)$$

Em que:

- V_{sd} é a força solicitante de cálculo ($V_{sd} = \gamma_f \cdot V_{Sk}$);
- V_{Rd2} é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por esmagamento, das diagonais comprimidas de concreto, dado por:

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \sin^2 \theta \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \quad (2.24)$$

E α_{v2} é dado por:

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (2.25)$$

f_{ck} em MPa.

Para casos com estribos a 90°, que são os casos mais comuns na prática, tem-se a expressão:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \sin 2\theta \quad (2.26)$$

2.2.7.2 CÁLCULO DA ARMADURA TRANSVERSAL

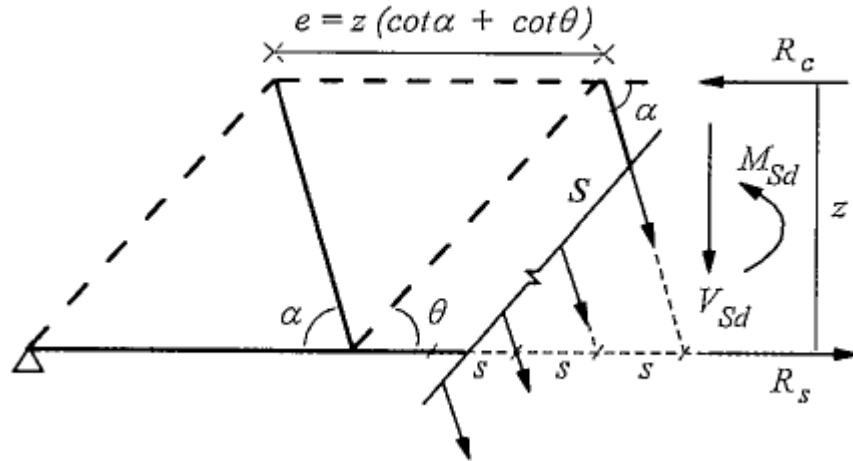


Figura 2.10 – Equilíbrio da Treliça de Morsch com uma seção cortando um diagonal tracionada (Clímaco, 2008).

Na Figura 2.10, para a seção S, cortando uma diagonal tracionada, as barras transversais com espaçamento s , resistem a uma força por unidade de comprimento do eixo da peça igual a $(A_{sw}/s) \cdot \sigma_{swd}$. Assim, a resultante das forças de tração nas barras que se equilibra a força cortante V_{sd} deve ser:

$$F_1 = V_{sd} / \sin \alpha = (A_{sw} \cdot \sigma_{swd}) \frac{e}{s} = A_{sw} \cdot \sigma_{swd} \cdot \frac{z \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)}{s}$$

A partir daí temos que:

$$A_{sw}/s = \frac{V_{sd}}{0,9 \cdot d} \cdot \frac{1}{\sigma_{swd} \cdot \sin \alpha \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)} \quad (2.27)$$

A Equação 2.26 é uma expressão genérica para o dimensionamento da armadura transversal. A norma NBR 6118:2014 opta por apresentar dois modelos de dimensionamento da armadura transversal. Aqui, apresentaremos o modelo II, por ser o mais genérico.

Segundo o modelo II apresentado pela norma, a resistência do elemento estrutural quanto à armadura transversal é considerada satisfatória quando ela atende à seguinte condição:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (2.28)$$

Ou

$$V_{sw} \geq V_{Sd} - V_c \quad (2.29)$$

Em que:

- V_{Rd3} é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal;
- V_{sw} é a parcela da força cortante absorvida pela armadura transversal, dado por:

$$V_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \sin \alpha \quad (2.30)$$

E f_{ywd} corresponde à tensão na armadura transversal, limitada ao valor f_{yd} no caso de estribos e 70% desse valor no caso de barras dobradas, não se tomando, para ambos os casos, valores superiores a 435 MPa.

V_c é a parcela da força cortante absorvida por mecanismos complementares, sendo:

Na flexão simples e na flexotração com a linha neutra cortando a seção com: $V_c = V_{c1}$, com:

- $V_{c1} = V_{c0}$, quando $V_{Sd} \leq V_{c0}$, sendo V_{c0} dado pela Equação 2.30
- $V_{c1} = 0$, quando $V_{Sd} = V_{Rd2}$

Em elementos estruturais tracionados com a linha neutra situada fora da seção: $V_c = 0$;

Na flexocompressão, $V_c = V_{c1} \cdot (1 + \frac{M_0}{M_{Sd,máx}}) < 2V_{c1}$

A norma define que a força V_{c0} como um valor de referência de V_c para $\theta = 45^\circ$ e é dado como:

$$V_{c0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \quad (2.31)$$

Conforme a norma, toma-se a resistência à tração característica inferior do concreto ($f_{ctk,inf} = 0,21f_{ck}^{2/3}$) e o coeficiente de minoração do concreto e a Equação 2.31 torna-se a seguinte:

$$V_{c0} = 0,09 \cdot f_{ck}^2 \cdot b_w \cdot d \quad (2.32)$$

A área da armadura transversal por unidade transversal por unidade de comprimento do eixo da peça, será dado por:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{sw}}{0,9 \cdot d \cdot f_{yd} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \sin \alpha} \quad (2.33)$$

Para o caso mais comum na prática, estribos a 90° , ou seja $\alpha = 90^\circ$, tem-se:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{sw}}{0,9 \cdot d \cdot f_{yd}} \cdot \tan \theta = \frac{V_{sd} - V_c}{0,9 \cdot d \cdot f_{yd}} \cdot \tan \theta \quad (2.34)$$

2.3 MÉTODOS DO ELEMENTOS FINITOS

Uma solução bastante utilizada na engenharia é transformar um problema complexo, em uma série de problemas mais simples. Com esse intuito, o método dos elementos finitos foi desenvolvido.

De uma maneira geral, pode-se dizer que a ideia central dos métodos dos elementos finitos é discretizar o domínio da equação que descreve o fenômeno dos físico em sub regiões, de geometria mais simples, denominado “elementos finitos”. Essas regiões têm dimensões finitas, ao contrário dos elementos infinitesimais utilizados no cálculo diferencial e integral.

Os elementos finitos frutos da subdivisão do domínio estão conectados entre si através de pontos, denominados nós. Ao conjunto de elementos e nós dá-se o nome de malha de elementos finitos.

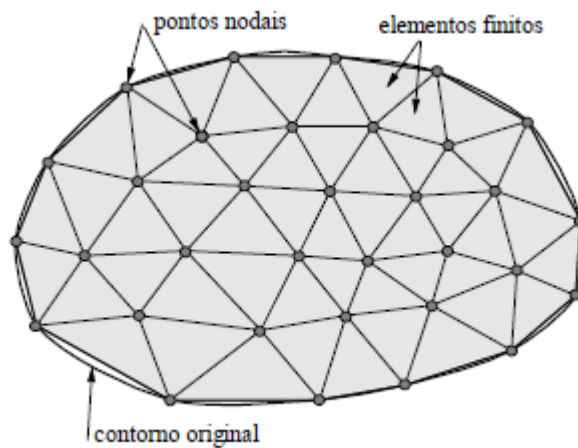


Figura 2.11 – Malha de elementos finitos (Souza, 2003)

A precisão dos resultados obtidos pelo método está relacionada com alguns aspectos. Souza (2003) diz que a quantidade de nós e elementos, e o tamanho e tipo de elementos presentes na malha são fatores que interferem na precisão do método. E complementa que à medida que o tamanho dos elementos finitos tende a zero e, conseqüentemente, o número de nós tende ao infinito, mais precisa é a solução do problema.

Martha (1994) também diz que as condições de convergência e acurácia do soluções obtidas através do método não depende só da formulação dos elementos, mas também da malha gerada para analisar um determinado problema. Ou seja, não adianta ter um bom algoritmo, se a discretização feita para o domínio do problema em questão não seja adequada. Gesualdo (2010) acrescenta que na escolha da malha devem ser procurados elementos de proporcionalidades de dimensões (regulares) evitando elementos distorcidos.

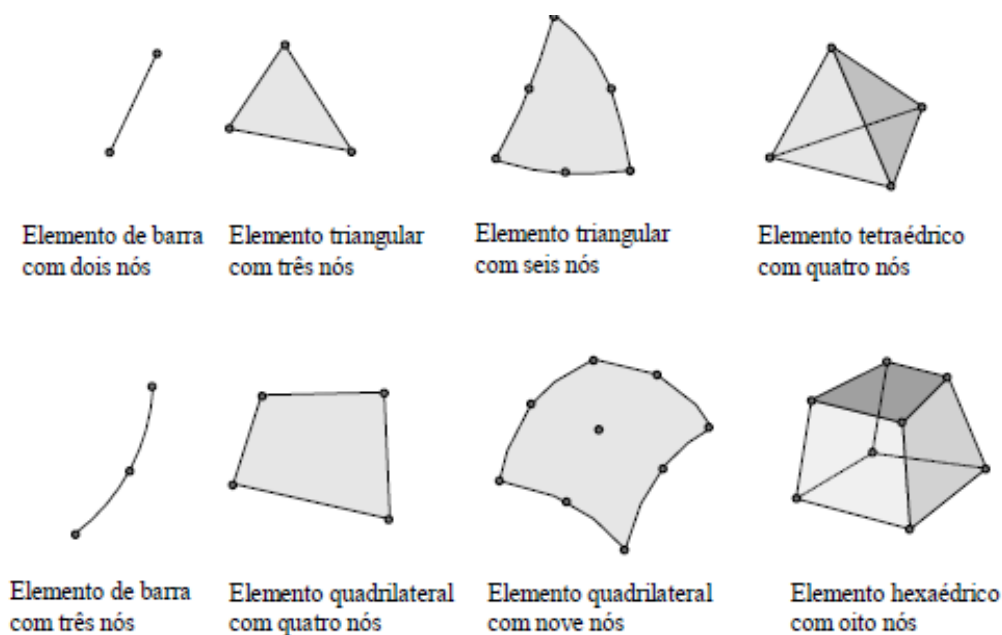


Figura 2.12 - Diferentes tipos de elementos finitos (Souza, 2003).

Além dos conceitos de “elementos finitos” e “nós”, também é importante falar sobre o “grau de liberdade”. Esse conceito é baseado na ideia de movimento da partícula em problemas da mecânica, onde considera-se que:

- Um ponto, em um espaço tridimensional, apresenta 3 graus de liberdade, relativos aos seu possíveis movimentos no espaço.
- Um corpo rígido, em um espaço tridimensional, apresenta 6 graus de liberdade, relativos aos seus 3 possíveis movimentos de translação e 3 possíveis movimentos rotação.

O comportamento de um elemento, que faz parte de um todo, entretanto, tem algumas características que podem restringir o movimento e diminuir seu grau de liberdade. O número e posicionamento dos nós da estrutura e seus respectivos graus de liberdade definem o comportamento do elemento (Souza, 2013).

Após a malha de elementos finitos ser caracterizada, deve-se definir as propriedades mecânicas dos materiais e suas condições de contorno. As condições de contorno podem ser divididas, essencialmente, em dois tipos, as condições de contorno essenciais e naturais, também conhecidas como condições de contorno de *Dirichlet* e *Neumann*, respectivamente. Essas condições dependem do caso em estudo. O presente trabalho, o estudo de uma viga de concreto armado, trata-se de uma condição de

equilíbrio, assim, as condições de contorno de *Dirichlet*, são dadas pelas condições próprias ao domínio, em outras palavras, as condições de apoio da estrutura e as condições de contorno *Neumann*, são dadas pelas condições externas ao domínio, caracterizadas pelas forças e/ou carregamentos atuantes na estrutura.

Existem diferentes procedimentos para a aplicação do método dos elementos finitos. Dentre eles, podemos destacar o método direto, que é utilizado para problemas mais simples e é baseado na interpretação física do problema estudado e os métodos dos resíduos ponderados e variacional, que são utilizados para problemas mais complexos, em que são necessários a solução de equações diferenciais.

Através de procedimentos diretos, ou por resíduos ponderados, ou por método variacional (balanço de energia) encontra-se a Equação 2.35, que relaciona a matriz de rigidez \mathbf{K} com os deslocamento nodais \mathbf{U} e as forças nodais \mathbf{F} da seguinte maneira:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (2.35)$$

2.3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

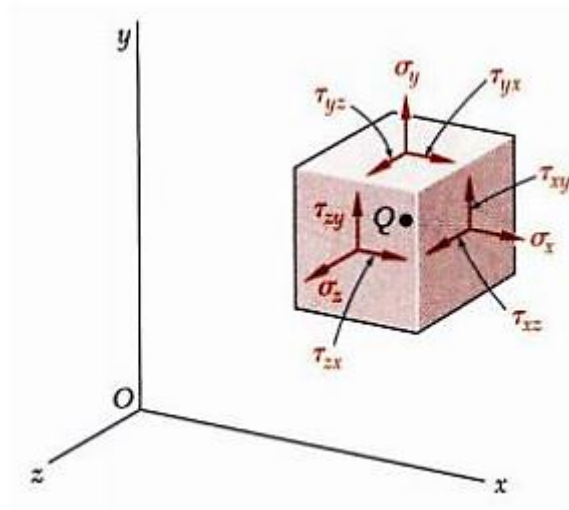


Figura 2.13 – Esforços atuantes em um volume diferencial.

A equação do equilíbrio estático é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Essas três equações acima podem ser escritas mais simplificadamente como:

$$\text{div } \bar{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \tag{2.37}$$

Em que

- \mathbf{b} é o vetor com forças de corpo
- $\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$

Aplicando a princípio do trabalho virtual, tem-se que:

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{t} dS - \int_V \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{b} dV = 0 \tag{2.38}$$

A equação acima diz que o trabalho externo é igual ao trabalho interno e:

- $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ é o vetor de deformações do elemento;
- $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de tensões internas do elemento; e
- \mathbf{u}^* é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Antes de continuar, é necessário a introdução dos conceitos de matriz de forma \mathbf{N} e matriz de deformação \mathbf{B} . Assim:

Os deslocamentos de cada ponto no interior do elemento finito é assumido como sendo função dos deslocamentos dos n nós do mesmo. Assim, temos:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U} \quad (2.39)$$

Em que \mathbf{N} é a matriz de forma, também designada de matriz de interpolação dos deslocamentos. O vetor \mathbf{N} tem por objetivo encontrar o valor das deformações nos pontos de interesse e depende da geometria do elemento escolhido, do seu número de nós/graus de liberdade e dos requisitos de convergência. E segundo Azevedo (2003), uma função de forma para um dado nó de um elemento é uma função tal que:

- Deve assumir o valor unitário no nó; e
- Deve anular-se nos demais nós.

Apesar de os deslocamento dos pontos nodais influenciarem nos deslocamentos/deformações internas do elemento, eles não estão representados no vetor \mathbf{U} . Dessa forma, assumindo os deslocamentos descritos na Equação 2.39, tem-se que as deformações internas dos elementos correspondentes pode ser expressa da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (2.40)$$

Em que \mathbf{B} é a matriz de deformação, que relaciona os deslocamentos nodais com as deformações e é obtida pela derivação e combinação das linhas da matriz \mathbf{N} .

Através dos novos conceitos introduzidos acima, chega-se à Equação 2.41:

$$\int_V \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t} dS - \int_V \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} dV = 0 \quad (2.41)$$

Através da Equação 2.41, pode-se introduzir as relações constitutivas do material. Desse forma, temos que as tensão internas de um elemento, causadas pelas forças externas, provocam deformações em todo o elemento. Essas tensões e deformações podem ser relacionadas da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{U} \quad (2.42)$$

Em que:

- σ é o vetor de tensões internas do elemento e pode ser descrito, em um elemento tridimensional, como:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

- D é a matriz constitutiva do elemento, que pode ser definido, para meio elástico, no estado tridimensional, como:

$$D = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Em que,

- E é o módulo de Elasticidade de Young; e

- ν é o coeficiente de Poisson

Substituindo a Equação 2.42 na Equação 2.41, obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{U} = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV = 0 \quad (2.45)$$

A equação acima relaciona força e deslocamento e pode ser escrita de forma simplificada como a Equação 2.35. Dessa maneira, tem-se que a expressão geral que determina a matriz de rigidez do elemento finito tridimensional pode ser escrita como:

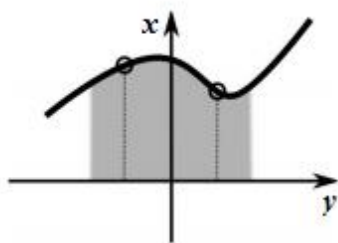
$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (2.46)$$

A Equação 2.46, entretanto, não tem resolução trivial. De forma a solucioná-la, usa-se o artifício da quadratura de Gauss. De acordo com Maciel (2013), essa técnica consiste, essencialmente, em expressar a integral de uma função em um domínio de integração através da soma ponderada de valores da função integranda avaliada em pontos específicos, conforme a Equação 2.47:

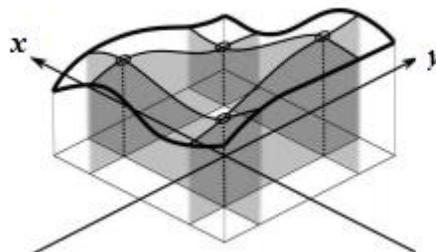
$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (2.47)$$

Em que:

- $f(x)$ representa a função a ser integrada;
- $f(x_i)$ represente o valor de $f(x)$ no ponto x_i ; e
- w_i : representa o peso do valor de $f(x_i)$ no ponto x_i .



(a) Regra de quadratura para
integração de funções 1D.



(b) Regra de quadratura para
integração de funções 2D.

Figura 2.14 - Representação gráfica da aplicação regra de quadratura de Gauss-Legendre de 2 pontos (Maciel, 2013)

Para aplicar o método de integração em um elemento finito, primeiro, define-se o elemento em sistema de coordenadas locais, como apresentado na figura abaixo.

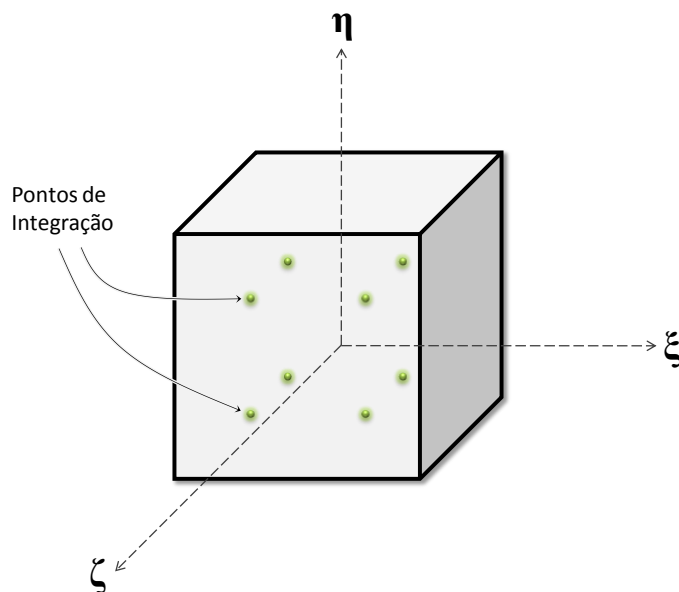


Figura 2.15 - Pontos de integração (ou de Gauss) de um elemento hexaédrico (Gontijo, 2012).

Em que as coordenadas (ξ, η, ζ) são as coordenadas locais de referência dos pontos de integração, cujo domínio, como já explicitado, é $[-1,1]$.

Para a integração de cada elemento, é necessário, entretanto, submeter a função integranda a uma transformação entre o sistema de coordenadas que define o seu domínio local de integração e o sistema de coordenadas natural, ou global. Para isso, usa-se a matriz Jacobiana de transformação de coordenadas. A Figura 2.16 exemplifica a função da matriz jacobiana.

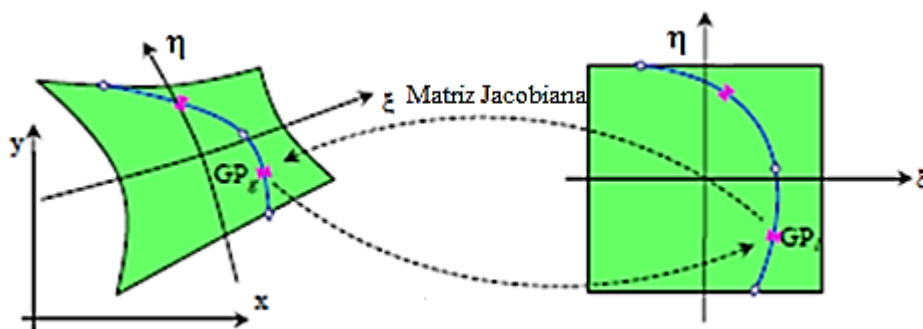


Figura 2.16 - Transformação entre o sistema de coordenadas local de integração e o sistema de coordenadas global (Hartl, 2002, modificado).

Em elementos finitos, a matriz jacobiana é frequentemente definida como matriz transposta da sua definição matemática e é dada pelas derivadas parciais do sistema de coordenadas global em relação ao sistema de coordenadas local. Assim, para um sistema tridimensional, tem-se a Equação 2.48.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Dessa forma, a matriz de rigidez pode ser reescrita como:

$$K = \sum_{i=1}^{np} B_i^T D_i B_i |J_i| w_i \quad (2.49)$$

Em que:

- B_i é a matriz que relaciona os deslocamentos nodais com as deformações do elemento calculada no ponto de integração i ;
- D_i é a matriz constitutiva do elemento para o ponto de integração i ; e
- $|J_i|$ é o determinante da matriz Jacobiana definida na Equação 2.48.

2.4 ANÁLISE DE ESTRUTURA DE CONCRETO ARMADO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

De acordo com Kwak & Filippou (1990), a primeira aplicação do método dos elementos finitos na análise de estruturas de concreto armado foi feito por Ngo and Scordelis (1967). Nesse estudo, vigas simples eram analisadas em um modelo em que o concreto e a armadura de aço foram representados por elementos triangulares de deformação constante, e um elemento especial de ligação foi usado para conectar o aço e o concreto e descrever o deslizamento entre as barras de aço e o concreto. Uma análise linear foi feita nas vigas com padrões de fratura pré definidos para determinar as tensões principais no concreto, tensões no aço e tensões na ligação entre os dois.

Nilson (1972) *apud* Kwak & Filippou (1990) introduziu a análise não-linear das propriedades do concreto e aço e uma relação não-linear de aderência entre os elementos com o método do carregamento progressivo. Quatro elementos triangulares foram combinados para formar um elemento quadrilátero concentrando o nó central. O método foi aplicado para elementos de concreto concêntricos e excêntricos sob tensão que eram submetidos à carregamentos aplicados no fim das barras de aço e os resultados eram comparados com dados experimentais.

Franklin (1970) *apud* Kwak & Filippou (1990) avançou ainda mais as capacidades do método analítico desenvolvendo uma análise não-linear que leva em conta, automaticamente, as fissuras no método dos elementos finitos e redistribui os esforços na estrutura. Isso tornou possível traçar a resposta de sistemas bidimensionais desde o carregamento inicial até a ruptura.

Diversos autores utilizaram o plano de tensões para estudar o comportamento de estruturas de concreto armado. Nayak & Zienkiewicz (1972) *apud* Kwak & Filippou (1990), por exemplo, estudaram tensões no campo bidimensionais e o comportamento elasto-plástico do concreto na compressão.

Para a análise de vigas de concreto armado com não linearidades material e geométrica, Rajagopal (1976) *apud* Kwak & Filippou (1990) desenvolveu uma placa retangular em camadas com rigidez axial e de flexão em que o concreto era tratado como um material ortotrópico. Já Dotroppe *et al.* (1973) *apud* Kwak & Filippou (1990) utilizaram um procedimento de elementos finitos por camadas em que elementos de laje eram divididos em camadas para levar em conta as fissurações progressivas através da espessura da laje.

No método dos elementos finitos, a análise de estruturas de concreto tem duas abordagens comuns para levar em conta a aderência das barras de aço no concreto. A primeira faz uso de um elemento de ligação proposto por Ngo & Scordelis (1967) *apud* Kwak & Filippou (1990). Esse elemento liga um nó do elemento finito de concreto com um nó do elemento finito de aço. Esse elemento não tem dimensões físicas e os dois nós conectados têm a mesma coordenada global.

De Groot *et al.* (1981) *apud* Kwak & Filippou (1990) usou uma abordagem diferente. Eles desenvolveram o uso de um elemento de contato entre o concreto e o aço

que é descrito por um material cujas propriedades considera as especificidades da zona de ligação.

Kwak & Filippou (1990) reforçam a dificuldade do estudo acerca da ligação entre o concreto e a barras de aço devido aos inúmeros parâmetros que estão envolvidos. Adiante, a ligação entre a barra de aço e o concreto será mais estudada.

3 ANÁLISE NÚMERICA

Estruturas de concreto armado são sistemas que apresentam dois materiais que devem interagir de forma adequada a fim de garantir seus objetivos de segurança e serviço. Na análise pelo método dos elementos finitos, deve-se atentar para a descontinuidade representada pela armadura presente no interior do concreto e que está, geralmente, distribuídos de forma irregular na estrutura. De acordo com Kwak & Filippou (1990), existem, na literatura, três abordagens diferentes para o método dos elementos finitos para a inclusão dessas descontinuidades: o homogeneizado, o discreto e o embutido. Esses métodos serão discutidos a seguir e, posteriormente, será descrito o método, introduzido por Durand (2008) e Durand & Farias (2012), o método semi-embutido.

Na análise pelo método dos elementos finitos, deve-se, também, representar os materiais componentes da estrutura a ser analisada, aqui chamada de modelagem constitutiva. A seguir alguns modelos que descrevem o comportamento do concreto e do aço são descritos.

3.1 MODELAGEM CONSTITUTIVA

O concreto armado apresenta um complexo desempenho estrutural. De acordo com Del Río (2015), isso ocorre por causa da diferença entre as relações de tensão e compressão do concreto, não linearidade da relação tensão-deformação, fenômenos de variação volumétrica devido a reações químicas ou de temperatura, aderência imperfeita entre o aço e o concreto onde encontra-se embutido, entre outros. O aço, por outro lado, apresenta propriedades físicas relativamente simplificadas.

Dessa maneira, o estudo do comportamento mecânico do concreto é bastante delicado. Abaixo, serão descritos os modelos clássicos que têm sido aplicados no estudo do comportamento mecânico do concreto.

3.1.1 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE MOHR-COULOMB

O critério de Mohr-Coulomb é baseado na suposição de que o fenômeno macroscópico da deformação plástica é o resultado do atrito entre as partículas do material. De acordo com de Souza Neto *et al.* (2008) *apud* Del Río (2015), esse critério,

estabelece que a deformação plástica inicia quando, sobre um plano no corpo, a tensão cisalhante e a tensão normal alcançam a combinação crítica:

$$\tau = c + \sigma_n \tan \phi \quad (3.1)$$

Em que:

- τ é a tensão cisalhante;
- c é a coesão do material;
- σ_n é a tensão normal; e
- ϕ é o ângulo de atrito interno do material.

3.1.2 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE DRUCKER-PRAGER

Segundo de Souza Neto *et al.* (2008) *apud* Del Río (2015), o critério de escoamento de Drucker-Prager, foi proposto como uma aproximação para a lei de Mohr-Coulomb. Estabelece que a plastificação começa quando o invariante J_2 da tensão desviadora e a tensão hidrostática p atingem uma combinação crítica.

3.1.3 MODELO UNIAXIAL ELÁSTICO-PERFEITAMENTE-PLÁSTICO

Um modelo frequentemente utilizado para representar as barras de aço da armadura de concreto armado é o modelo uniaxial Elástico-Perfeitamente-Plástico e é caracterizado por uma curva idealizada de tensão normal-deformação como mostra a Figura 3.1.

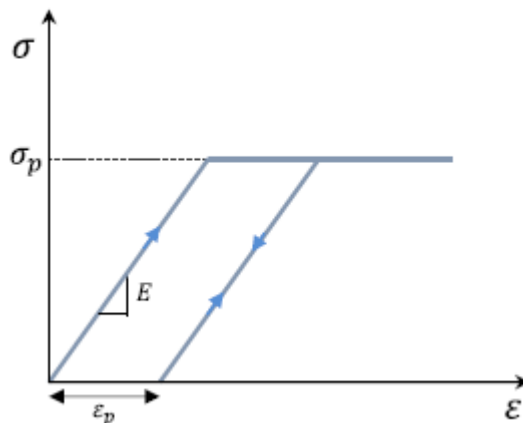


Figura 3.1- Curva tensão-deformação do modelo elástico perfeitamente plástico.

Nessa curva, duas regiões podem ser destacadas.

- A zona elástica, caracterizada por $\sigma < \sigma_p$, em que σ é a tensão normal e σ_p é a tensão de escoamento, que é uma característica do material.
- A zona plástica, caracterizada por $\sigma = \sigma_p$, em que ocorre um incremento indeterminado da deformação plástica. Neste modelo, a tensão de um ponto nunca pode exceder a tensão de escoamento.

A relação entre tensão e deformação é dada pela lei de Hooke de acordo com:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (3.2)$$

Em que:

- E é o módulo de Young e depende do material.

3.1.4 MODELO ELÁSTICO LINEAR

Outro modelo amplamente empregado para representar o concreto e as barras de aço é o modelo elástico linear. Este modelo é representado por apenas dois tipos de parâmetros: o módulo de elasticidade (E) e o coeficiente de Poisson (ν).

Neste modelo a relação tensão-deformação é dada pela lei de Hooke generalizada, considerando que para baixos níveis de tensão, o acréscimo de tensões varia linearmente com o acréscimo de deformações.

A matriz constitutiva \mathbf{D} para o estado plano de deformação é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.3)$$

Para o estado plano de tensão \mathbf{D} é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad \sigma_z = 0 \quad (3.4)$$

Para o caso tridimensional a matriz D é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3.2 MÉTODO HOMOGENEIZADO

O método homogeneizado têm uma abordagem mais simples na análise das estruturas reforçadas. O método altera uniformemente as propriedades dos elementos na região reforçada da estrutura. Assim, ele empregado em casos em que há uma distribuição uniforme dos reforços, de modo que os elementos na região possam ser simulados como um novo material homogêneo, mas com rigidez diferente. Devido à simplificação adotada, esse método possui limitações, de modo que quanto maior for a irregularidade dos reforços, maior é o erro na resolução.

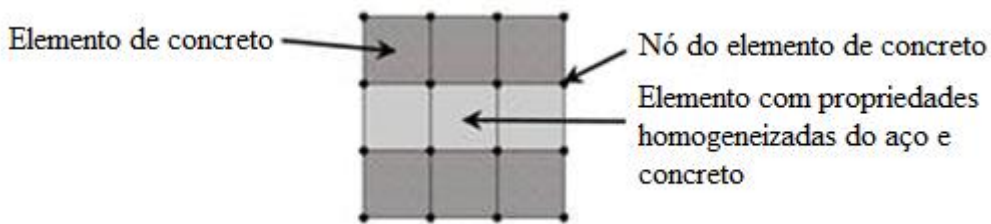


Figura 3.2 – Método homogeneizado (Azimi *et al.*, 2015, modificado).

3.3 MÉTODO DISCRETO

De acordo com Kwak & Filippou (1990), a análise de estruturas reforçadas utilizando o método discreto corresponde à abordagem convencional na utilização elementos de barras pelo método dos elementos finitos. Nessa abordagem, a posição dos

elementos de barra na malha é distribuída de forma que os nós da barra de reforço coincida com os nós dos elementos circundantes. A Figura 3.3 mostra, esquematicamente, a posição dos elementos de barra com relação aos elementos sólidos.

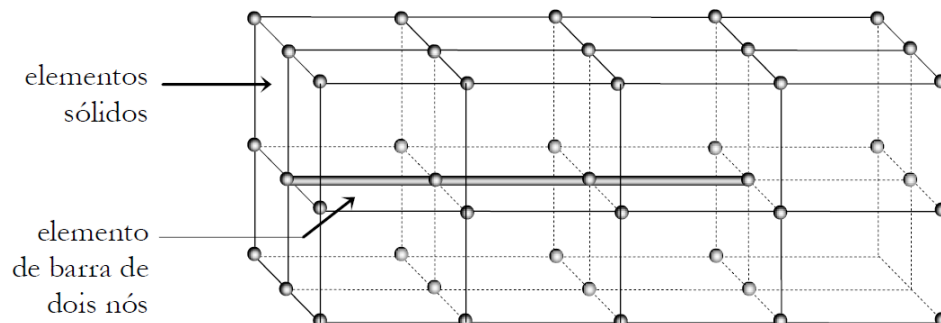


Figura 3.3 – Posição dos reforços com relação aos elementos sólidos numa análise pelo Método Discreto (Durand, 2008).

Os problemas na geração de malha de elementos finitos gera uma certa dificuldade em abordar esse método no estudo de estruturas de concreto. Em um caso real, há a possibilidade de que os reforços tenham comprimento e inclinações variados. Assim, há de se gerar uma nova malha a cada nova configuração de armaduras de modo que ela esteja adequadamente adaptada para a conexão entre o reforço e os elementos finitos a sua volta.

3.4 MÉTODO EMBUTIDO

Por outro lado, o método embutido permite que as barras de reforço atravessem, livremente, os elementos. Dessa forma, de acordo com Durand (2008), esse método possibilita a representação dos reforços em sua exata posição espacial, sem nenhum incremento nos graus de liberdade do sistema. A Figura 3.4 mostra, esquematicamente, a posição dos elementos de barra com relação aos elementos sólidos.

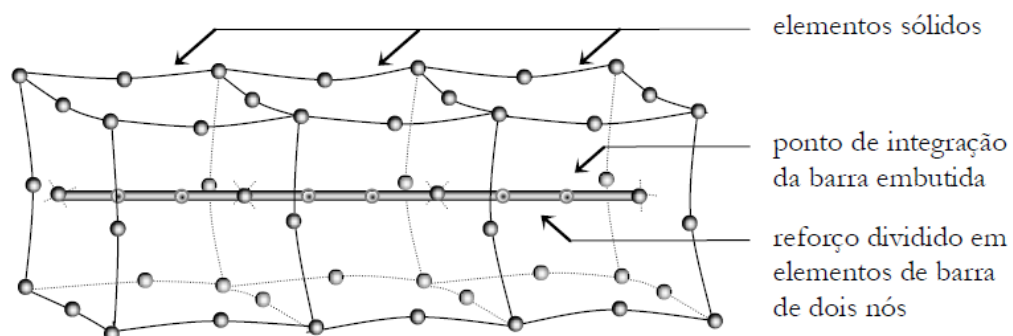


Figura 3.4 – Posição dos reforços com relação aos elementos sólidos numa análise pelo Método Embutido (Durand, 2008).

Esse método tem como hipótese principal que a aderência entre o reforço e a estrutura ao seu redor é perfeita. Hartl (2002) afirma que nessa hipótese os dois materiais possuem o mesmo campo de deslocamento e, conseqüentemente, de deformações.

As diferenças na criação de malha de elementos finitos seguindo o método discreto e o embutido podem ser vistos na figura abaixo.

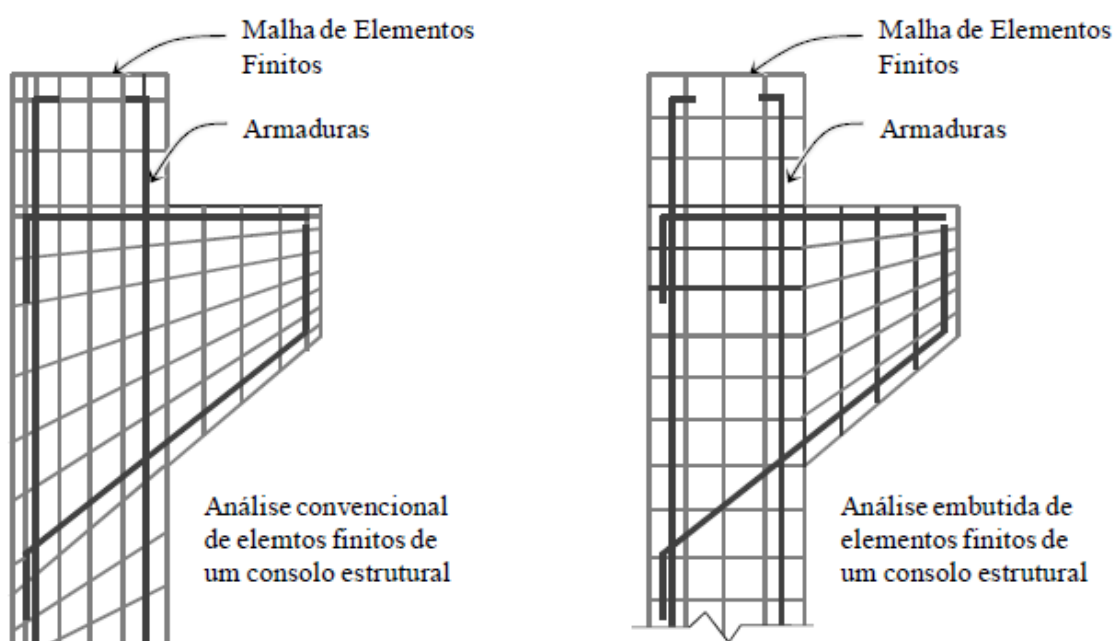


Figura 3.5 – Comparação das malhas para o método discreto e método embutido (Durand & Farias, 2012).

3.5 MÉTODO SEMI-EMBUTIDO

Uma nova abordagem, chamada de método semi-embutido foi introduzida por Durand (2008). O método em questão combina características do método discreto e do método embutido.

Assim como no método embutido, a barra pode atravessar o elemento sólido em qualquer local. As barras, entretanto, são discretas, e possuem seus próprios nós. Apesar de barras atravessarem os elementos sólidos, esses elementos não são divididos em diferentes regiões. Isso acontece sobrepondo as barras ao longo dos elementos sólidos e ligando-os por meio de molas que atuam como elementos de junta.

Durante o processo de geração da malha, o reforço é discretizado em novos elementos de barras dentro dos limites dos elementos que foram atravessados e elementos de junta são gerados de modo a ligar o reforço à estrutura ao seu redor.

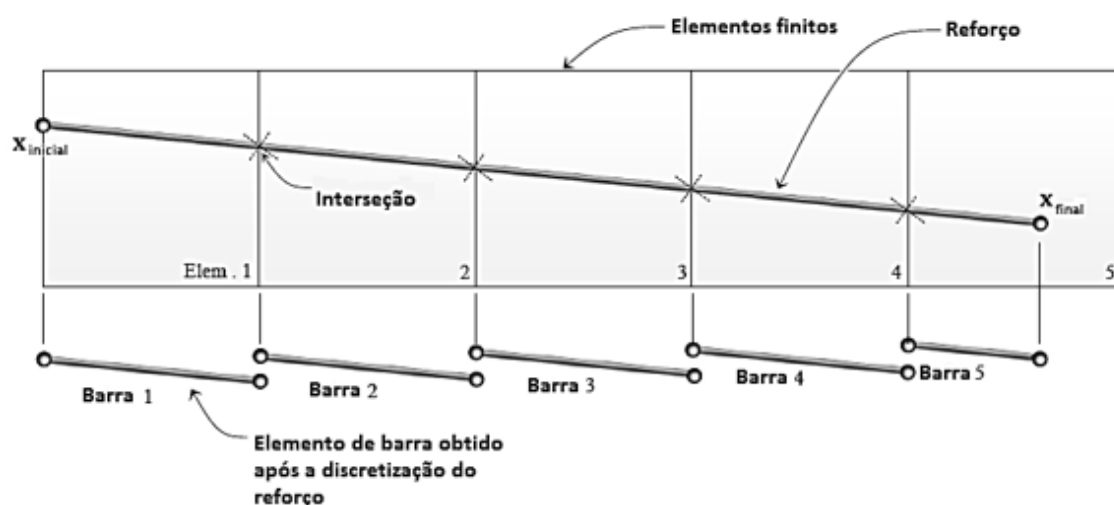


Figura 3.6 – Discretização do Reforço (Durand & Farias, 2012, modificado).

Os reforços seguem a formulação convencional de elementos finitos para elementos de barra. A modelagem da interface será abordada em 3.6.1.

3.6 ELEMENTOS DE JUNTA

Vários problemas de engenharia envolvem interação entre diferentes materiais. Esses problemas incluem, por exemplo, a interação solo-estrutura, e materiais compostos, como, por exemplo, o concreto armado.

Na análise de materiais compostos, como o concreto armado, o comportamento da região de contato entre os materiais distintos devem ser representados propriamente, já que os efeitos de ligação podem afetar na resposta estrutural.

Na modelagem numérica, um elemento finito de junta é introduzido a fim de modelar essa interação. Esse elemento deve ser capaz de simular o comportamento físico e mecânico da região de contato.

De acordo com Li & Kaliakin (1993), duas abordagens para a modelagem dessa interface evoluíram. A primeira abordagem envolve o uso de elementos com espessura zero. A segunda abordagem envolve o uso de elementos de espessura finita.

Na categoria de elemento de junta com espessura zero, de acordo Li & Kaliakin (1993), Goodman *et al.* em 1968 foi um dos primeiros a propor esse tipo de junta. Goodman *et al.* propuseram o uso de elemento de junta para simular o comportamento de maciços rochosos em duas dimensões. O elemento de junta apresentado tinha formato retangular e possui quatro nós e 8 graus de liberdade. Desai *et al.* (1974, 1986) *apud* Sharma & Fellow (1992) descobriram que apesar dos elementos de Goodman apresentarem resultados satisfatórios ao cisalhamento, eles não apresentam resultados realísticos para tensões normais.

A rigidez de um elemento de junta 3D pode ser descrita da seguinte forma:

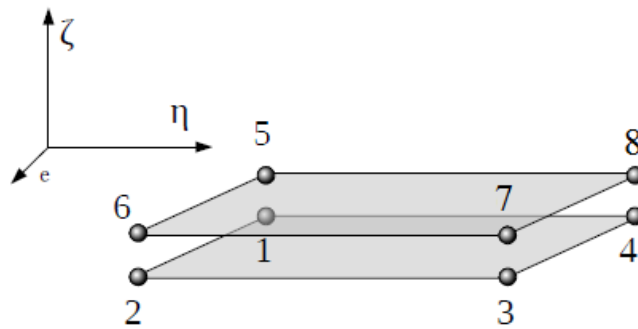


Figura 3.7 – Elemento de Junta 3D.

O vetor de deslocamentos nodais com relação ao sistema $x' y'$ são denotados por:

$$\mathbf{u}' = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_4 \ v_4 \ w_4]^T \quad (3.6)$$

Em termos dos deslocamentos nodais, os deslocamentos relativos entre dois pontos análogos podem ser expressos utilizando as funções de forma de elementos de quatro nós, assim:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix} = [-N_1 - N_2 - N_3 - N_4 \ N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \mathbf{u} \quad (3.7)$$

Em que:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A matriz de rigidez \mathbf{K}' em coordenadas locais pode ser obtida através de:

$$\mathbf{K}' = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \int \frac{1}{t} \mathbf{N}^T t \mathbf{D}_u \frac{1}{t} \mathbf{N} t dA = \int \mathbf{N}^T \mathbf{D}_u \mathbf{N} dA = \int \mathbf{N}^T \mathbf{D}_u \mathbf{N} |J| d\xi d\eta \quad (3.9)$$

Em que: $\mathbf{D}_u = \frac{1}{t} \mathbf{D}$ e $\mathbf{B} = \frac{1}{t} \mathbf{N}$

Para obter a matriz de rigidez em coordenadas globais é preciso realizar a rotação:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}' \mathbf{T} \quad (3.10)$$

Em que a matriz \mathbf{T} é dado por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r \end{bmatrix}_{3n \times 3n} \quad (3.11)$$

E a matriz \mathbf{r} é dada por:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3.6.1 ELEMENTOS DE JUNTA PARA A INTERFACE AÇO-CONCRETO

Durand (2008) introduziu a “modelagem pontual da interface” e Durand & Farias (2012) desenvolveu a “modelagem contínua da interface”.

A “modelagem pontual de interface” conecta as barras obtidas durante a discretização do reforço com o sistema de elementos sólidos através de molas, como que funcionam como elementos de junta, representando essa interface. As molas têm rigidez, mas nenhum comprimento, já que os nós da barra têm as mesmas coordenadas dos nós dos elementos sólidos.

Os nós reais da barras são graus de liberdade adicionais e têm suas próprias equações de equilíbrio e seus deslocamentos são obtidos diretamente do sistema global. Os deslocamentos dos nós fictícios, por outro lado, são obtidos através de equações de compatibilidade.

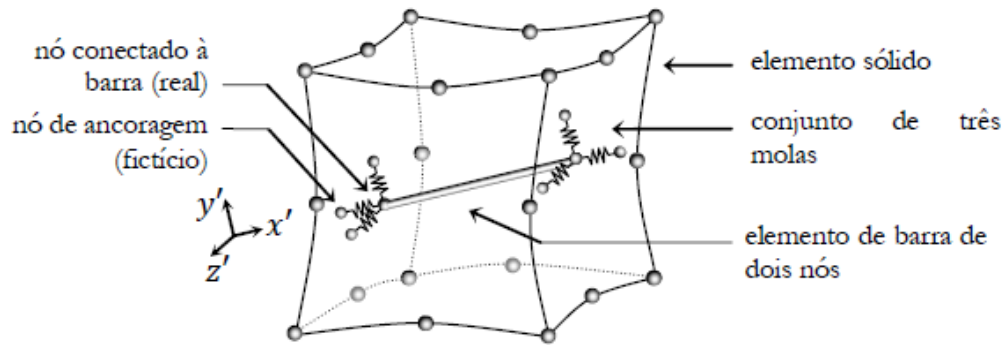


Figura 3.8 - Interface sendo representada por elementos de mola (Durand, 2008).

Enquanto “modelagem pontual de interface” considera os elementos de juntas como constituídos por um conjunto de molas localizadas no nós das barras, a “modelagem contínua de interface” substitui o conjunto de molas por um único elemento de junta especial. Esse elemento de junta conecta as barras de reforço com o elemento a sua volta sem adicionar nós extras ao sistema. Em outras palavras, ao invés de alguns pontos de contato entre a barra e o elemento à sua volta, o elemento de junta especial representa todos os pontos de contato e sua rigidez é determinada por integração utilizando-se a quadratura de Gauss.

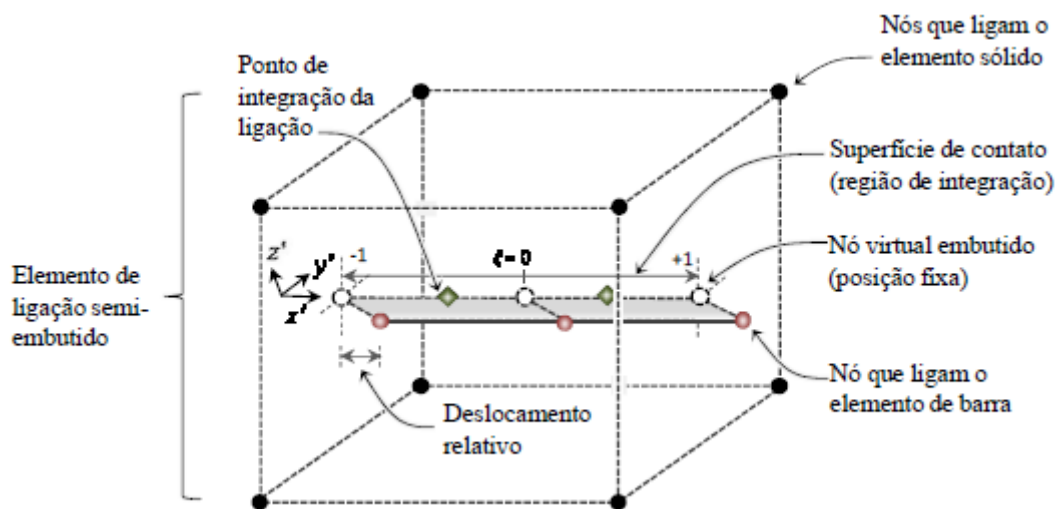


Figura 3.9 – Elemento de junta especial (Durand & Farias, 2012, modificado).

O deslocamento relativo de um ponto na região de contato de acordo com o sistema de coordenadas cartesianas local $x'y'z'$ pode ser expresso na forma de um vetor $\mathbf{u}_{x'y'z'}^r = [u_{x'}^r, u_{y'}^r, u_{z'}^r]^T$. A partir daí, a formulação é toda feita como foi explicitado em 2.3.1.

De acordo com Durand & Farias (2012), para um dado ponto na interface este modelo constitutivo visava encontrar a relação elasto-plástica entre os deslocamentos relativos, aqui representados pelo vetor $\mathbf{u}^r = [u_{x'}^r, u_{y'}^r, u_{z'}^r]^T$ e o vetor de tensões correspondentes, dado por $\boldsymbol{\sigma} = [\tau_x, \sigma_y, \sigma_z]^T$. Considerando que a falha da interface ocorre no eixo x' , a modelagem elasto-plástica apenas relacionará $u_{x'}^r$ com τ_x , que serão, daqui em diante, simplesmente denotados como u^r e τ .

A resistência da interface pode ser dada por um critério similar ao Mohr-Coulomb (MC), assumindo um parâmetro de aderência a e um ângulo de atrito ϕ . Dessa forma, o critério de falha para a interface pode ser escrito como:

$$\tau_x = a + \sigma_c \tan \phi \quad (3.13)$$

Em que:

- τ_x , é o esforço cortante na região de contato na direção x' da barra; e
- σ_c representa a tensão média de confinamento que é obtida interpolando o elemento sólido atravessado.

Como dito acima, o valor de σ_c não é constante e depende do nível de tensões da região no entorno.

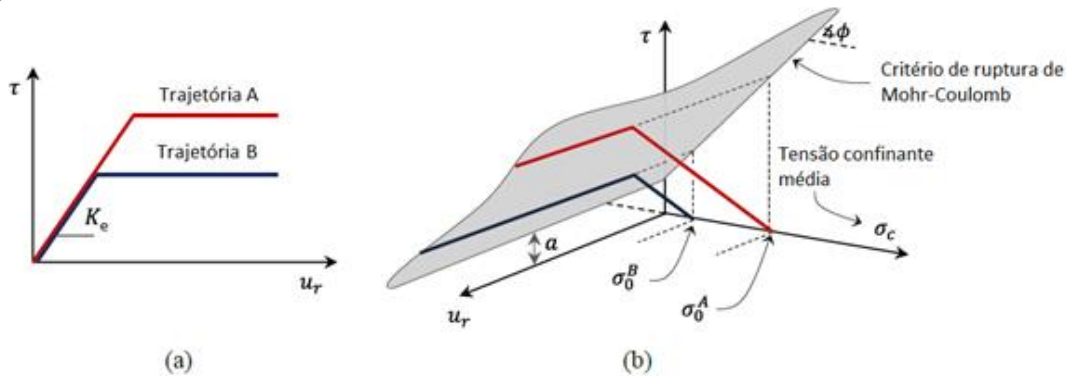


Figura 3.10 - Relação tensão-deformação limitada pelo critério de ruptura de Mohr-Coulomb. a) no espaço $\tau_x - u_x^r$; b) no espaço $\tau_x - u_x^r - \sigma_c$ (Durand & Farias, 2012, modificado).

Logo antes da ruptura, um comportamento elástico simples pode ser adotado através de um módulo de rigidez cisalhante:

$$\tau_{x'} = K_J u^r \quad (3.14)$$

O valor da rigidez pode ser obtido experimentalmente a partir de um ensaio de arrancamento:

$$K_J = \frac{T}{u_{máx}} \quad (3.15)$$

Em que:

- T é a força de arrancamento; e
- $u_{máx}$ representa o deslocamento final obtido durante o teste.

3.6.1.1 PARÂMETROS DO ELEMENTO DE INTERFACE

Os valores da tensão de arrancamento e os respectivos deslocamentos foram obtidos pelo experimento de Tastani & Pantazopoulou (2002). Em seus ensaios de arrancamento foram testados corpos de prova com e sem anéis metálicos que aumentavam a tensão de confinamento. Os resultados são apresentados na Figura 3.11 abaixo:

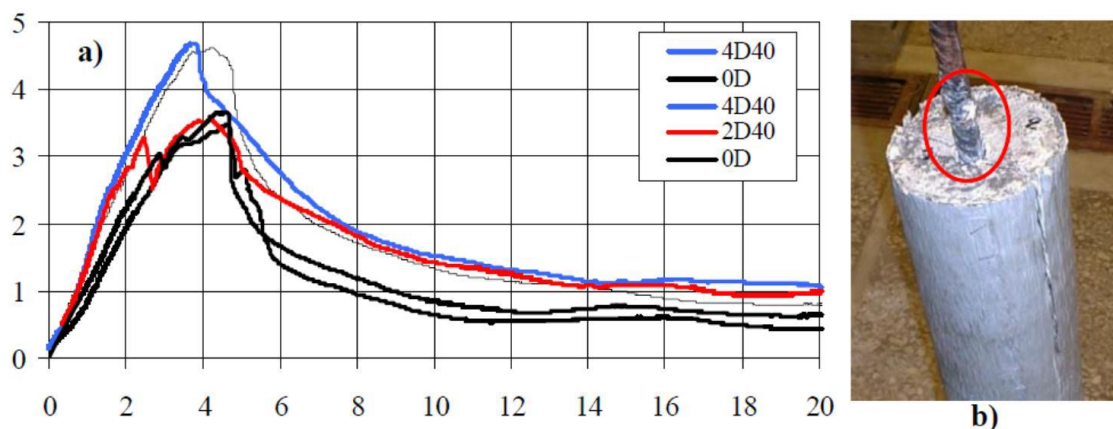


Figura 3.11 - Curvas de tensão por deslocamento das barras com diferentes arranjos de anéis metálicos (Tastani & Pantazopoulou, 2002, *apud* Gontijo, 2012).

Utilizando os resultados dos corpos de prova sem anéis metálicos o módulo da rigidez cisalhante calculado foi de:

$$K_j = 1 \times 10^6 kPa/m \quad (3.16)$$

Já o módulo de rigidez vertical (K_n) é utilizado apenas para restringir o movimento das barras no sentido vertical, ou seja, impedir que a barra se desloque para cima ou para baixo devido a algum carregamento. De acordo com Gontijo (2013), seu valor tem uma quase que irrelevante influência nos resultados, mas, caso seja muito grande, pode gerar problemas de mau condicionamento na matriz de rigidez global. Via de regra, deve ser apenas maior ou igual ao módulo da rigidez cisalhante, mas de preferência da ordem de 10 a 100 vezes maior. Dessa forma, seu valor foi definido como:

$$K_n = 1 \times 10^8 kPa/m \quad (3.17)$$

O último parâmetro necessário para a interface entre o concreto e o aço é o diâmetro médio da interface, que nesse trabalho será considerado igual ao diâmetro das barras.

3.6.2 ELEMENTOS DE JUNTA PARA A INTERFACE CONCRETO-CONCRETO

Os elementos finitos de junta foram desenvolvidos, primeiramente, pensando em simular a interação entre dois materiais. Entretanto o uso desse elementos foi ampliado quando se assumiu que os materiais podem ser aproximados por conjuntos de elementos conectados por diferentes modelos de juntas que simulam as propriedades de interação dos materiais. Essa abordagem foi proposta, primeiramente para materiais granulares e depois para materiais heterogêneos como o concreto.

Zivaljic *et al.* (2014) utilizaram essa abordagem para modelar um estrutura de concreto armado. A interação entre os elementos de concreto foram baseadas em algoritmos regidos pelos princípios do contato potencial das forças e pela Lei de Coulomb para o atrito. A representação dos elementos de junta está representada na Figura 3.12.

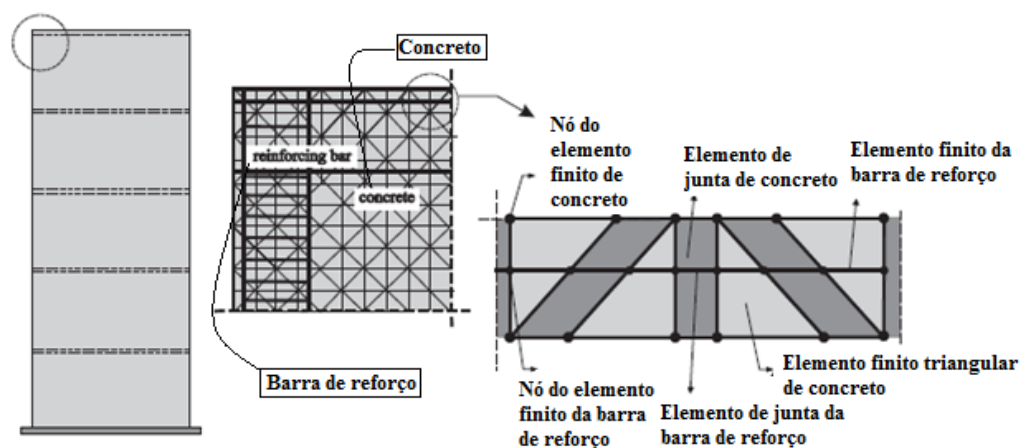


Figura 3.12 – Discretização de estrutura de concreto armado

Zivaljic *et al.* (2014) fizeram diversas simulações, dentre elas, a de uma viga de concreto armado biapoiada com duas cargas pontuais. A mesma viga foi modelada por dois tipos de malhas, uma mais refinada que a outra. A situação descrita está representada na figura a seguir.

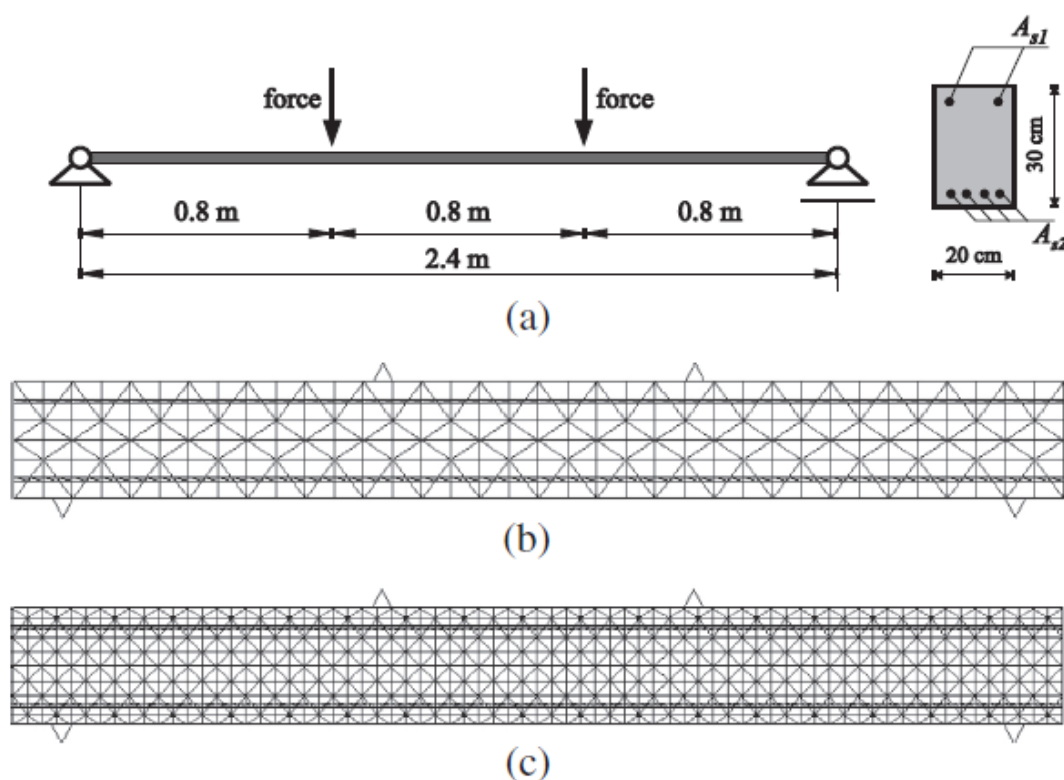


Figura 3.13 – Viga de concreto armada: (a) geometria (b) malha “grosseira” (c) malha “refinada” (Zivaljic *et al.*, 2014)

Os resultados obtidos podem ser visto no gráfico carga-deslocamento a seguir:

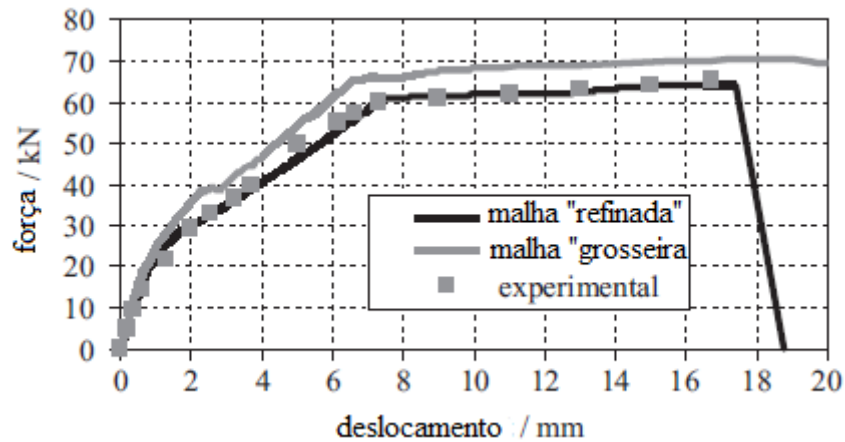


Figura 3.14 – Gráfico carga-deslocamento

Zivaljic *et al.* (2014) também conseguiram simular o aparecimento de trincas. A figura a seguir mostra os resultados obtidos para cada tipo de malha simulada.

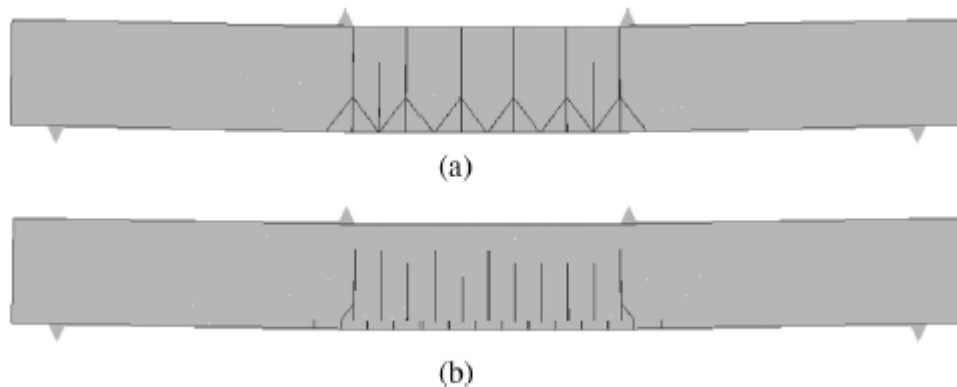


Figura 3.15 – Aparecimento de trincas: (a) malha “grosseira” (b) malha “refinada”

Zivaljic *et al.* (2014) concluíram que o refinamento da malha tem uma influência significativa nos resultados da carga-deslocamento, as malhas mais refinadas fornecem resultados mais precisos. Além disso, mostraram que o uso de juntas entre elementos de concreto podem auxiliar na previsão de trincas.

3.6.3 MODELO CONSTITUTIVO DOS ELEMENTOS DE JUNTA PARA A INTERFACE CONCRETO-CONCRETO

Nesse trabalho, a não-linearidade do concreto será dada através de elementos de junta introduzidos entre os elementos de concreto na malha. A abordagem empregada por Živaljić, *et al.*(2014) servirá de modelo para a implantação desse elemento. Nesse modelo, os nós dos elementos de concreto vizinhos, apesar de ocuparem o mesmo espaço físico, são independentes.

Entre esses elementos de concreto há um elemento de junta, inicialmente com espessura nula. Essa espessura varia à medida em que a fissura na estrutura começa a se propagar por meio da separação das bordas dos elementos de concreto. Isso acontece quando a tensão a que a junta está submetida atinge a resistência de tração do concreto f_t .

Apesar de na prática a abertura da fissura só ocorre quando a tensão no concreto atinge a resistência a tração do mesmo, do ponto de vista numérico da implementação do elemento junta, é inviável a não abertura da junta antes de atingir a resistência a tração f_t . Dessa forma, adotou-se, na junta implementada, elevada rigidez antes de atingir a tensão de tração do concreto, o que implica pequenos deslocamentos. Quando a tensão de tração do concreto é atingida, entretanto, a **resistência** do elemento de junta reduz bruscamente, de maneira exponencial. A separação das bordas dos elementos de concreto induz uma tensão de ligação σ_{cj} , que é tomada como sendo uma função do tamanho da separação δ das bordas da fissura, como podemos observar na Figura 3.16.

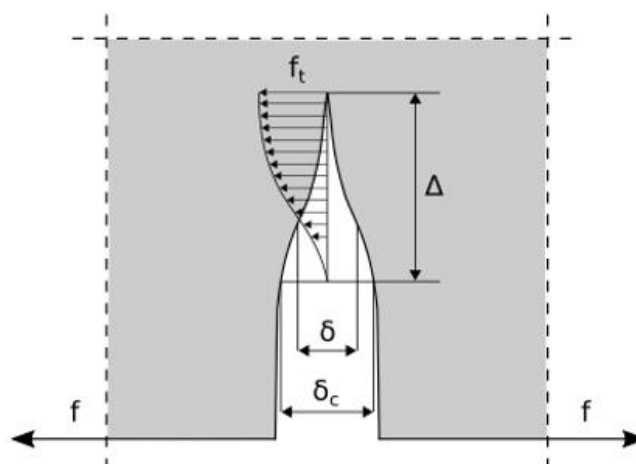


Figura 3.16 - Modelo de distribuição de tensão na fissura (Živaljić, *et al.*, 2014, modificado).

Como podemos ver na Figura 3.17, nesse modelo, o gráfico tensão-deslocamento tem duas regiões bem definidas. A primeira região, que vai da separação 0 da junta até δ_t (abertura quando a junta está submetida a uma tensão igual à resistência à tração do concreto, f_t) se caracteriza por ter um comportamento elástico. Quando a tensão f_t é atingida, um concreto sofre um “amolecimento”. A fissura abre, da separação entre os elementos de concreto δ_t até a separação δ_c (separação crítica) e a tensão de ligação entre esses elementos cai, tendendo a zero quando a separação atinge δ_c como mostrado na Figura 3.16.

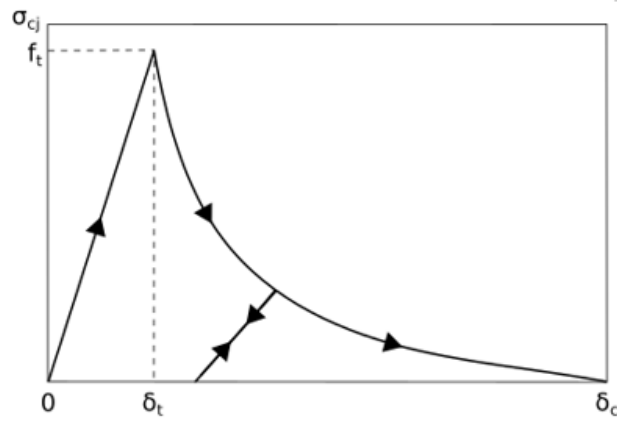


Figura 3.17 - Curva tensão de ligação/deslocamento.

A região elástica é definida ligando-se o ponto (0,0) ao ponto (f_t, δ_t) . Em que f_t é a resistência a tração do material e a separação δ_t é definida pela equação:

$$\delta_t = \left[\frac{2hf_t}{p_0} \right] \quad (3.18)$$

Em que:

- δ_t é a separação correspondente a tensão de ligação quando esta é igual a resistência à tração do concreto, f_t ;
- h é a média do tamanho dos elementos de concreto; e
- p_0 é um termo correspondente a penalidade.

A introdução da variável h permite que a separação dos elementos adjacentes seja normalizada pelo tamanho dos elementos do concreto e é calculado pela seguinte formula:

$$h = \frac{V_1 + V_2}{2A} \quad (3.19)$$

Em que V_1 e V_2 representam, respectivamente, os volumes do elemento 1 e do elemento 2 que estão em contato, e A representa a área do elemento de junta (área equivalente a face de contato entre os elementos 1 e 2).

O erro no deslocamento é controlado através de uma ferramenta de penalidade p_0 , como uma função do módulo de Young, E_c . Živaljić (2012) mostrou que para $p_0 = 100E_c$, o erro relativo é menor que 1% e que com um aumento da penalidade, o erro de deslocamento é reduzido.

Quando a tensão f_t é atingida, um concreto sofre um “amolecimento”. A fissura abre, da separação entre os elementos de concreto δ_t até a separação δ_c (separação crítica) e a tensão de ligação entre esses elementos cai, tendendo a zero quando a separação atinge δ_c como mostrado na Figura 3.16. Para uma separação $\delta_t \leq \delta \leq \delta_c$, a tensão de contato é dada por:

$$\sigma_{cj} = z f_t \quad (3.20)$$

Em que z é uma função heurística que representa uma aproximação das curvas de tensão deslocamento e, de acordo com Hordijk (1992) é dada por:

$$z = [1 + (C_1 D_t)^3] e^{-C_2 D_t} - D_t (1 + C_1^3) e^{-C_2} \quad (3.21)$$

Em que C_1 e C_2 são constantes e foram obtidas por Hordijk (1992) através de aproximação de curvas experimentais de peças de concreto submetida a tração e valem, respectivamente, 3 e 6,93 (neste trabalho adotou-se $C_1=3$ e $C_2=7$). Já o parâmetro de dano D_t é determinado de acordo com a seguinte expressão:

$$D_t = \begin{cases} \frac{\delta - \delta_t}{\delta_c - \delta_t}, & \text{se } \delta_t < \delta < \delta_c; \\ 1, & \text{se } \delta > \delta_c; \end{cases} \quad (3.22)$$

Da mesma forma que obteve os parâmetros C_1 e C_2 , Hordijk (1992) obteve a abertura crítica de forma a melhor se adequar aos resultados experimentais, uma vez que a obtenção experimental de δ_c é algo bastante difícil. O valor obtido para a abertura crítica foi de 160 μm .,

Para um δ negativo, optou-se por uma rigidez bem elevada com objetivo que a junta apenas repasse as tensões para os elementos de concreto, reduzindo assim, os deslocamentos negativos, ou seja, a sobreposição dos elementos de concreto. A tensão σ_{cj} para deslocamentos negativos é dado pela equação a seguir:

$$\sigma_{cj} = \frac{2\delta}{\delta_t} f_t, \text{ se } \delta < 0 \quad (3.23)$$

Após a definição do modelo da rigidez normal do elemento junta, torna-se necessário definir a rigidez cisalhante para assim o modelo ficar completo. Nesse trabalho, optou-se por adotar um cisalhamento elástico. Dessa forma, o cisalhamento pode ser descrito da seguinte forma:

$$\tau = K_s \cdot u \quad (3.24)$$

Em que:

- K_s é o módulo de rigidez cisalhante da junta; e
- u representa o deslocamento entre os elementos finitos de concreto no plano da junta.

4 ESTUDO DE CASOS

No presente trabalho, são feitas comparações entre os resultados obtidos com auxílio de *software*, e os resultados experimentais obtidos em outros trabalhos.

As análises das estruturas de concreto armado serão obtidas por meio da utilização da biblioteca de elementos finitos FemLab. O FemLab permite realizar análises estáticas lineares e não lineares em duas ou três dimensões utilizando elementos isoparamétricos. O programa foi estrito na linguagem de programação *Julia*, que é uma linguagem dinâmica de alto nível, apropriada para computação numérica e científica.

Após feita a análise, utilizou-se o *software* Paraview®, um programa de código aberto e multi-plataforma, que permite a visualização e exploração de dados de forma interativa em 3D.

4.1 VIGAS DE BRESLER & SCORDELIS (1963)

De acordo com Vecchio & Shim (2004), as clássicas séries de vigas ensaiadas por Bresler & Scordelis (1963) para investigar o comportamento de concreto armado são consideradas uma referência pela qual pode-se calibrar modelos de elementos finitos. Bresler & Scordelis (1963) ensaiaram doze vigas de concreto armado. Elas foram divididas em quatro séries (AO, A, B e C) de 3 vigas (1, 2 e 3). Cada série se diferencia pela quantidade de armadura longitudinal e transversal, pelo comprimento do vão, pelas dimensões da seção transversal e pela resistência do concreto. Nesse trabalho, foram analisadas as seguintes vigas: OA1, A1, A2, A3, B1 e C2. A seção transversal de cada uma dessas viga é detalhada na Figura 4.1.

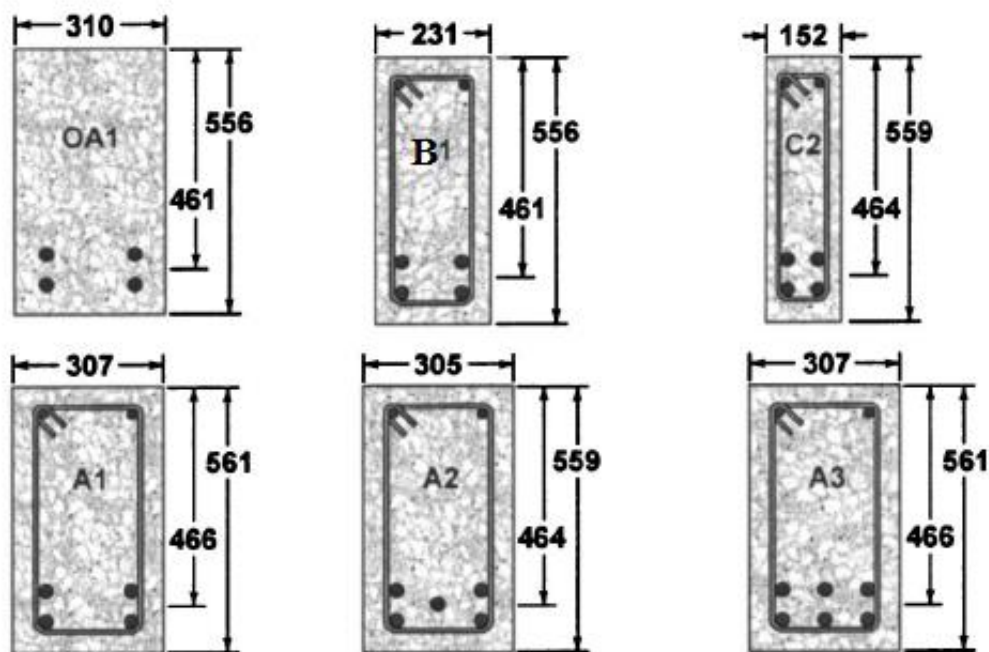


Figura 4.1 – Seções transversais das vigas de Bresler & Scordelis (1963)
(Vecchio & Shim, 2004, modificado)

O esquema de carregamento do ensaio em questão é demonstrado na Figura 4.2. Nesse ensaio, as vigas, todas aos 13 dias de idade, foram submetidas a acréscimos de carregamentos de 40 kN até a iminência de ruptura e, logo depois, incrementos de 20 kN até a ocorrência da falha.

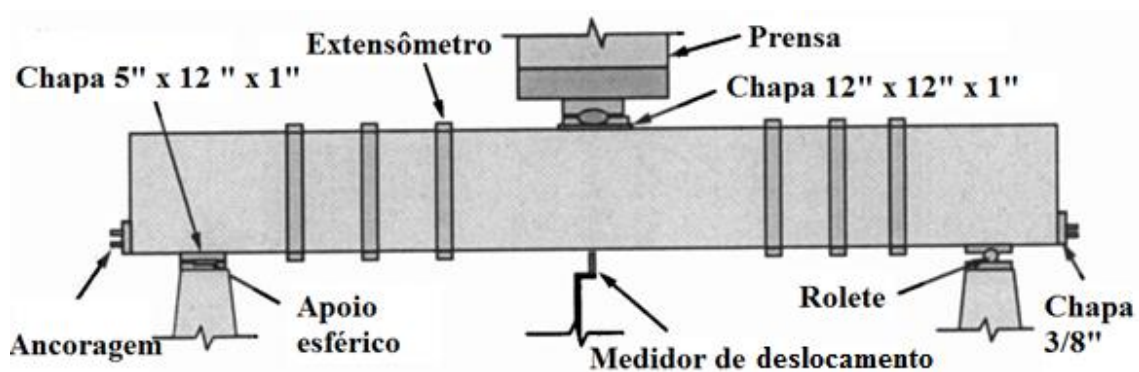


Figura 4.2 – Configuração do ensaio das vigas de Bresler & Scordelis (Vecchio & Shim, 2004)

As dimensões e armaduras das vigas estão resumidas nas tabelas abaixo.

Tabela 4.1 – Dimensões da viga de Bresler & Scordelis (1963) e suas armaduras

Viga	b (mm)	h (mm)	L (mm)	Armadura Inferior	Armadura Superior	Estribos
OA1	310	556	4100	4 n° 9	-	-
A1	307	561	4100	4 n° 9	2 n° 4	n°2 c/ 210
A2	305	559	5010	5 n° 9	2 n° 4	n°2 c/ 210
A3	307	561	6840	6 n° 9	2 n° 4	n°2 c/ 210
B1	231	556	4100	4 n° 9	2 n° 4	n°2 c/ 190
C2	152	559	5010	4 n° 9	2 n° 4	n°2 c/ 190

Tabela 4.2 – Propriedades da armadura das vigas de Bresler & Scordelis (1963)

Barra	Diâmetro (mm)	Área (mm ²)	f _Y (MPa)	f _U (MPa)	Es (MPa)
n° 2	6,4	32,2	325	430	190000
n°4	12,7	127	345	542	201000
n° 9	28,7	645	555	933	218000

Tabela 4.3 – Propriedade do concreto das vigas de Bresler & Scordelis (1963)

Viga	f _{ck} (MPa)	f _{ctk} (MPa)	E (MPa)	v
OA1	22,6	3,97	36500	0,20
A1	24,1	3,86	36500	
A2	24,3	3,73	32900	
A3	35,1	4,34	34300	
B1	24,8	3,99	36500	
C2	23,8	3,93	32900	

4.2 VIGAS DE LEONHARDT & WALTHER (1962)

Leonhardt & Walther (1962) testaram duas vigas para determinar máximo esforço cortante e a armadura necessária para garantir resistência ao esforço cortante, doravante denominadas L1 e L2.

O perfil longitudinal da viga e condições do ensaio estão presentes na Figura 4.3, enquanto a seção transversal e a respectiva armadura estão representadas na Figura 4.4. As vigas possuem duas barras longitudinais e não possuem estribos. As vigas foram ensaiadas simetricamente com dois carregamentos concentrados, que são aplicados através de uma placa metálica de 30 mm de espessura a fim de evitar concentrações de tensões.

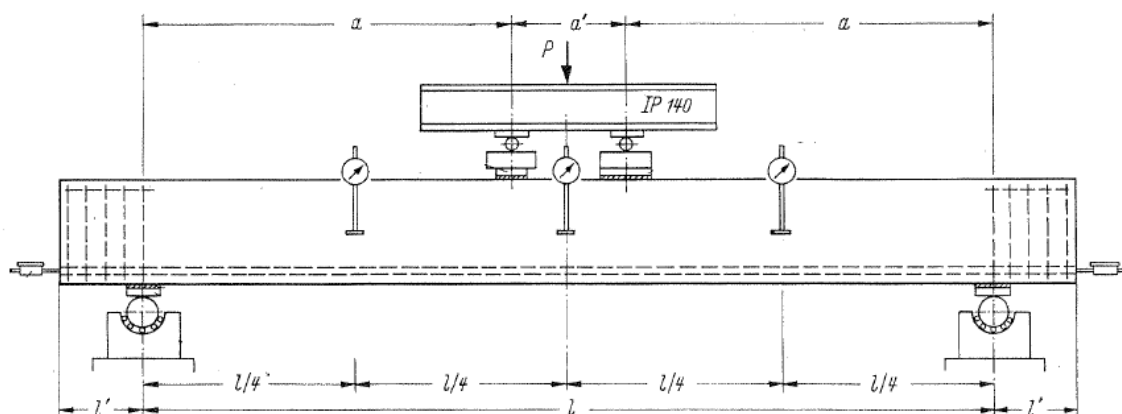


Figura 4.3 - Geometria e configuração das vigas Leonhardt & Walther (1962) (Malm, 2006).

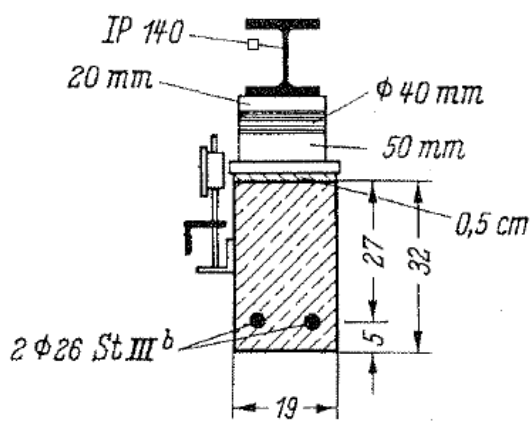


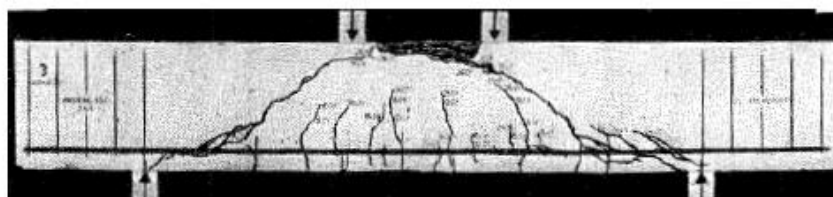
Figura 4.4 - Seção transversal das vigas de Leonhardt & Walther (1962) (Malm, 2006).

As dimensões das vigas são especificadas na Tabela 4.4.

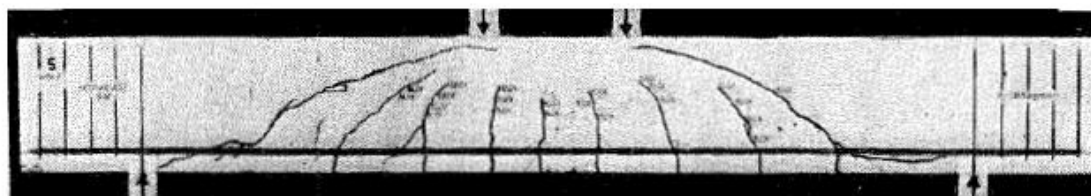
Tabela 4.4 - Dimensões das vigas Leonhardt & Walther (1962)

Viga	Comprimento L (mm)	Distância do carregamento a (mm)	Largura b (mm)	Altura h (mm)
L1	1450	540	190	320
L2	1950	810	190	320

Em cada estágio de carregamento, as vigas eram carregadas com 10% da capacidade esperada. A taxa de carregamento era de 50 kN/minuto e, entre cada estágio, houve uma pausa de 30 minutos. A viga L1 teve uma deflexão, no seu centro, de 3,68 mm quando atingiu 117,7 kN em seu último estágio de carregamento e rompeu com um carregamento de 150 kN. Já a viga L2, teve uma deflexão 2,57 mm, em seu centro, quando o carregamento foi de 58,9 kN. A ruptura ocorreu com um carregamento de 60,3 kN.



(a)



(b)

Figura 4.5 - Padrão de fissuras observadas nas vigas ensaiadas, (a) Viga L1 e (b) Viga L2 (Leonhardt e Walther (1962) *apud* Malm, 2006)

Tabela 4.5 – Propriedade do concreto das vigas de Bresler & Scordelis (1963)

Viga	f_{ck} (MPa)	f_{ctk} (MPa)	E (MPa)	ν
L1	28,48	2,49	31720	0,20
L2	28,48	1,64	31720	0,20

5 MODELAGEM NUMÉRICA

A modelagem numérica, foi desenvolvida seguindo alguns passos, respeitando as especificidades de cada viga a ser analisada. Nesse trabalho, primeiro, criou-se blocos, de modo a modelar geometricamente as vigas e sua respectiva armadura. Em seguida, foram determinadas as condições de contorno, em que definiu-se o carregamento e os apoios aos quais as vigas foram submetidas. Por último, os modelos constitutivos dos materiais foram definidos.

Em todos os casos estudados, o concreto foi modelado como um material elástico-linear. Já o aço, como elástico perfeitamente plástico. Os elementos de juntas da interface concreto-concreto e concreto-aço foram definidos como explicitado em 3.6.3 e 3.6.1.1, respectivamente. Todos os parâmetros necessários à modelagem, para a análise numérica, são explicitados nos Capítulos 4 e 5.

5.1 VIGAS DE BRESLER & SCORDELIS (1963)

As vigas OA1, A1, A2, A3, B1 e C2 de Bresler & Scordelis (1963) foram modeladas em 9 blocos, sendo um deles para a aplicação da carga. A Figura 5.1 ilustra essa distribuição. Um dos apoios foi considerado como do primeiro gênero, de modo que a viga seja isostática. A malha de elementos finitos é exibida na Figura 5.2.

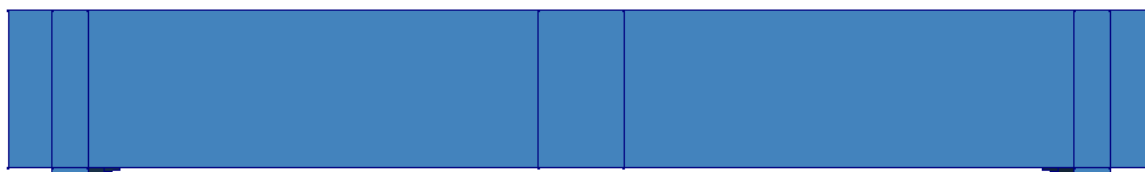


Figura 5.1 – Modelagens das vigas OA1, A1, A2, A3, B1 e C2: Divisão do domínio em blocos utilizados para a discretização em elementos finitos.

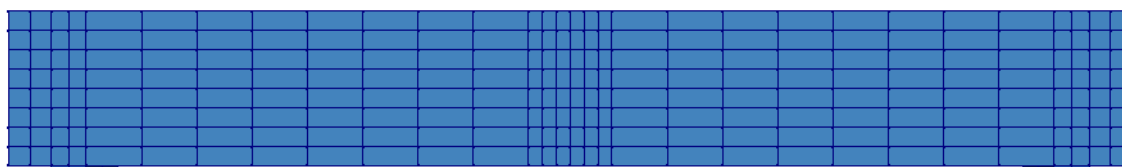


Figura 5.2 – Malha de elementos finitos das vigas OA1, A1, A2, A3, B1 e C2.

Nos experimentos dessas vigas, as cargas foram aplicadas em superfícies compostas por chapas metálicas, como mostrado na Figura 4.2. Dessa forma, a modelagem considerou cargas distribuídas nas superfícies dessas chapas.

O carregamento adotado na análise se baseou na carga de ruptura fornecida pelos experimentos. Essa carga foi aplicada em 20 incrementos e, em cada um, o deslocamento do centro da viga era medido. Os carregamentos adotados para cada viga estão descritos na tabela abaixo.

Tabela 5.1 – Carregamentos adotados nas vigas de Bresler & Scordelis (1963)

Viga	Carga (kN)
A1	455
A2	485
A3	468
B1	445
C2	325
OA1	333

Depois de modeladas, as vigas foram analisadas de modo a calibrar os parâmetros. Depois de algumas tentativas, percebeu-se que, para os mesmos parâmetros, os resultados obtidos para as vigas de Bresler & Scordelis (1963) eram compatíveis com os resultados experimentais. Esses parâmetros foram:

$$\delta_c = 160 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$p_0 = 1,0 \text{ kPa}$$

$$k_s = 0,5 \times 10^6 \text{ kPa/m}$$

5.1.1 VIGAS A1, A2 E A3

As Figuras 5.3, 5.4 e 5.5 relacionam o carregamento e os deslocamentos obtidos experimentalmente e numericamente das vigas A1, A2 e A3, respectivamente. Nesse grupo de vigas, os resultados numéricos e experimentais obtiveram uma boa correlação.

De maneira geral, essa correlação é excelente no começo do carregamento, prevendo um comportamento inicial praticamente elástico das vigas. Algumas discrepâncias nos resultados, entretanto, começam a surgir quando a carga atinge cerca de 50% da carga de ruptura. A disparidade entre os resultados, como ocorre no caso das vigas A2 e A3 é justificada pela simplificação adotada na modelagem da junta presentes na interface concreto-concreto. Essa simplificação faz com que as trincas apareçam apenas por esforços axiais, e não cortantes. Assim, a modelagem prevê menos trincas e, consequentemente, a rigidez da viga reduz em menor grau quando comparada com os experimentos.

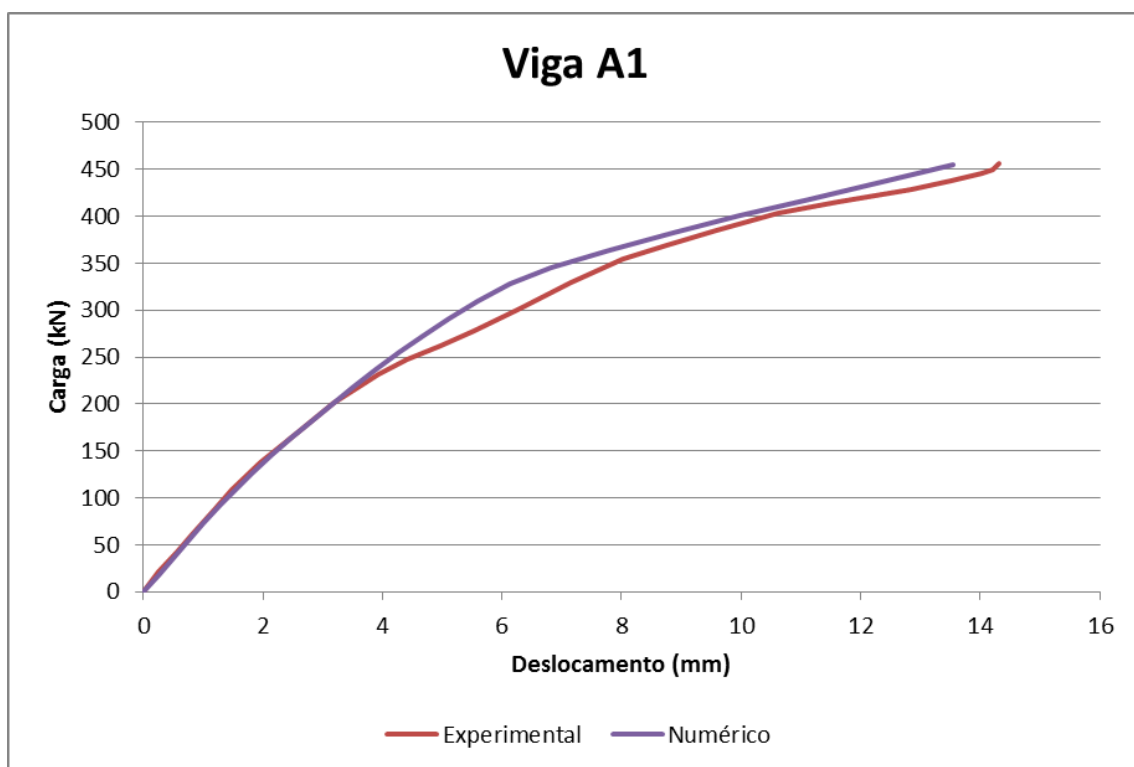


Figura 5.3 - Diagrama de carga *versus* deslocamento para a viga A1.

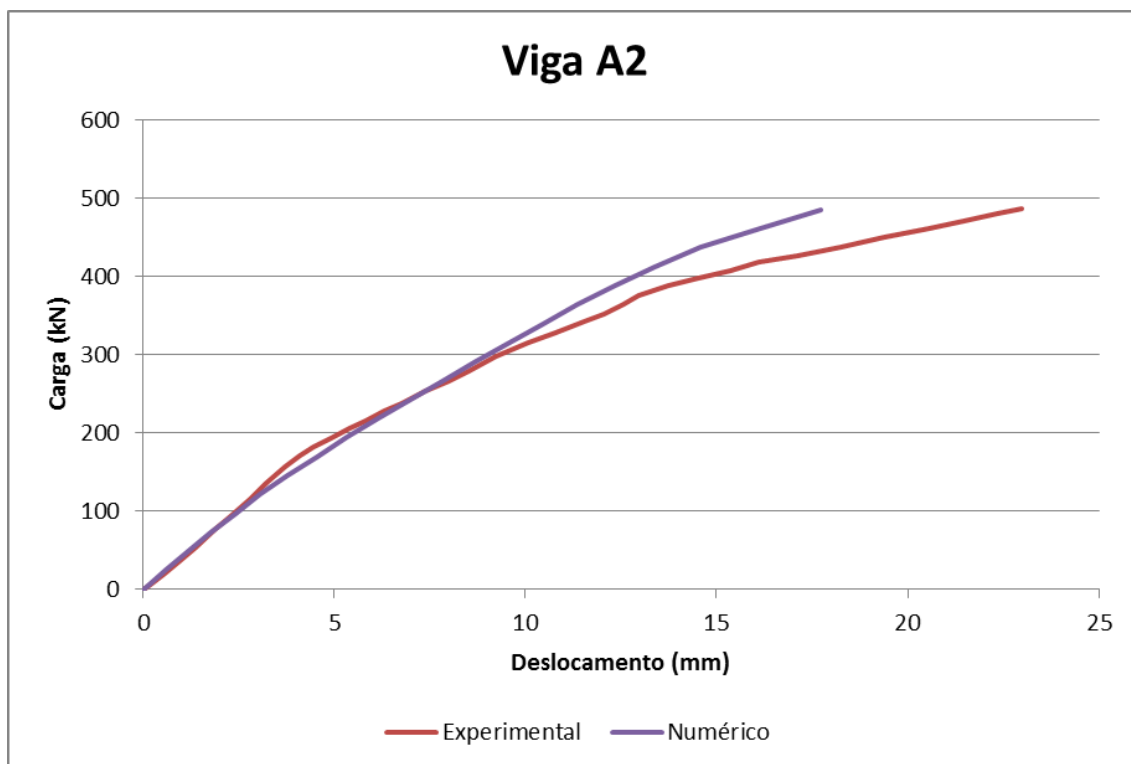


Figura 5.4 - Diagrama de carga *versus* deslocamento para a viga A2.

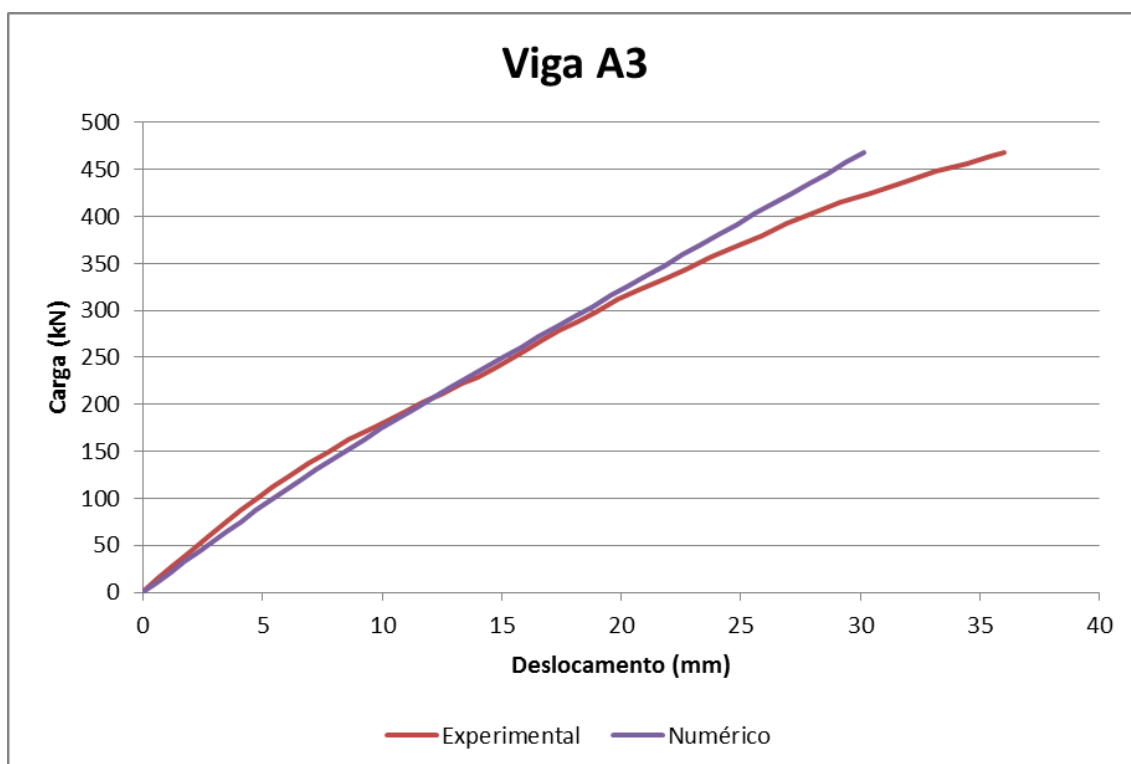


Figura 5.5 - Diagrama de carga *versus* deslocamento para a viga A3.

Pela análise das tensões nas armaduras, que pode ser feita através das Figuras 5.6, 5.7 e 5.8, constatou-se que, como era esperado, as armadura longitudinais inferiores foram as mais solicitadas. Na viga A2 por exemplo, a tensões chegaram a 448 MPa, ainda assim abaixo da tensão de escoamento.

É possível perceber também que, nas vigas A1 e A2, os estribos foram consideravelmente solicitados, ao contrário do que ocorre na viga A3. As Figuras 5.9, 5.10 e 5.11, explicam esse comportamento. Através delas, percebe-se que nas vigas A1 e A2, houve maior mobilização de esforços cortantes maior (deslocamento no plano das juntas) e isso gerou maior solicitação nos estribos.

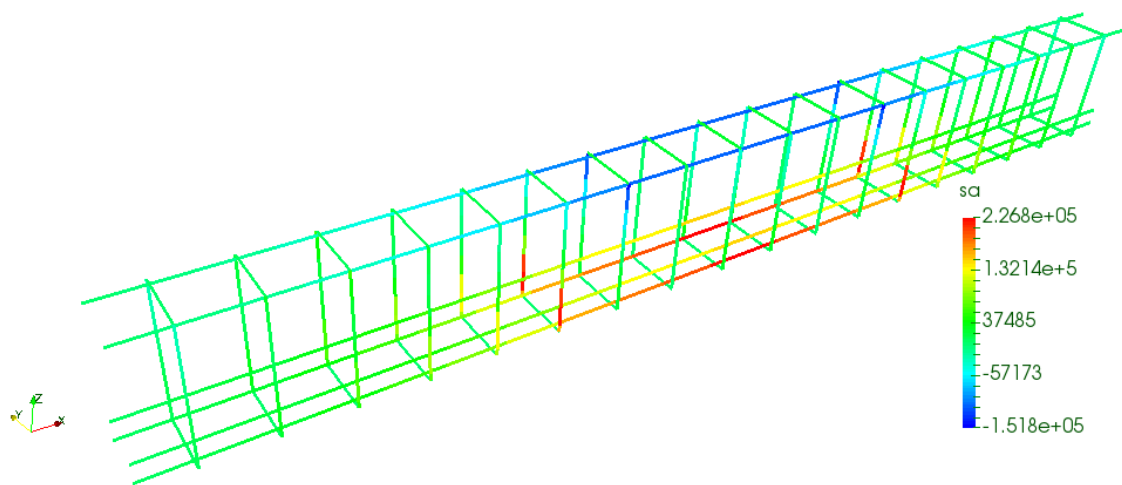


Figura 5.6 - Tensões axiais na armadura da viga A1.

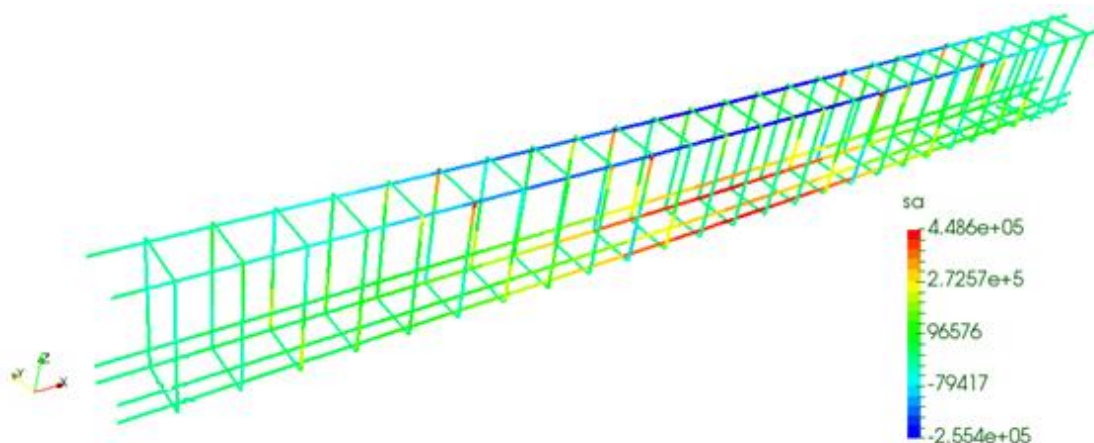


Figura 5.7 - Tensões axiais na armadura da viga A2.

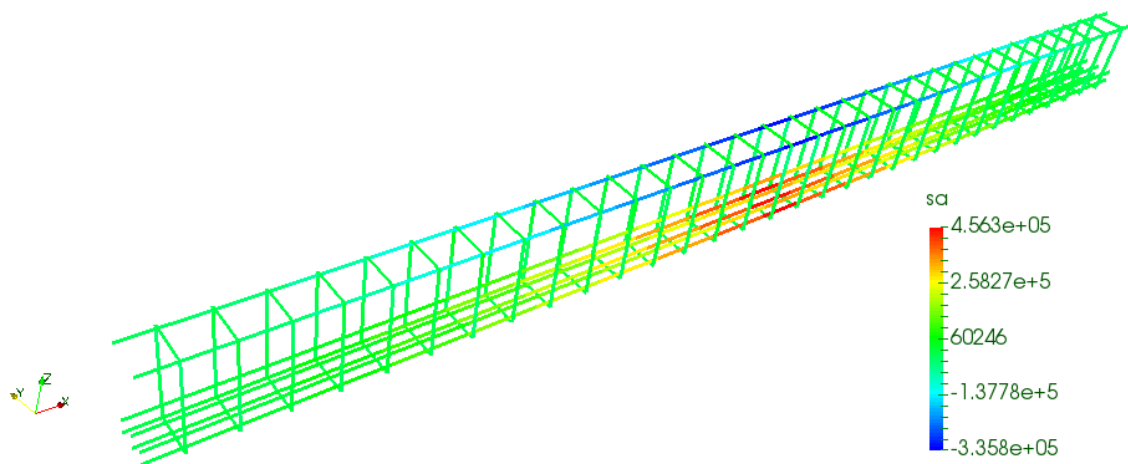
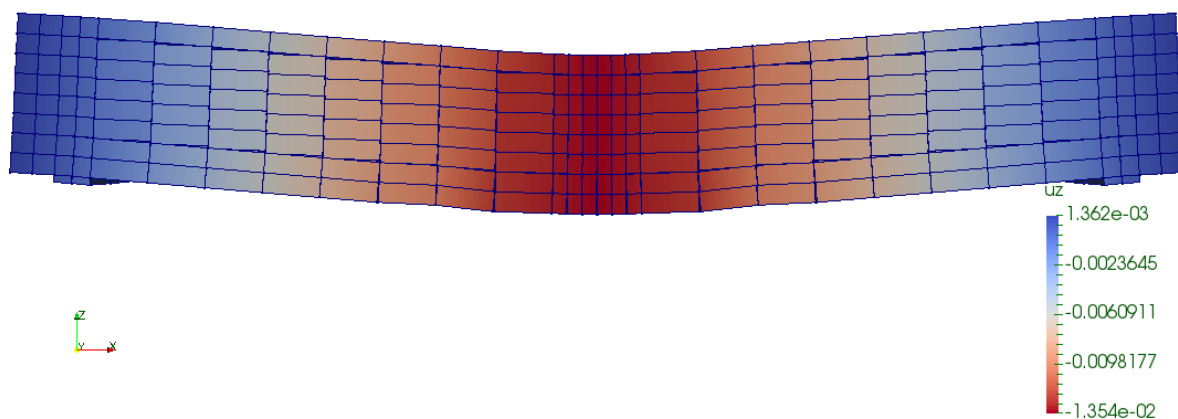
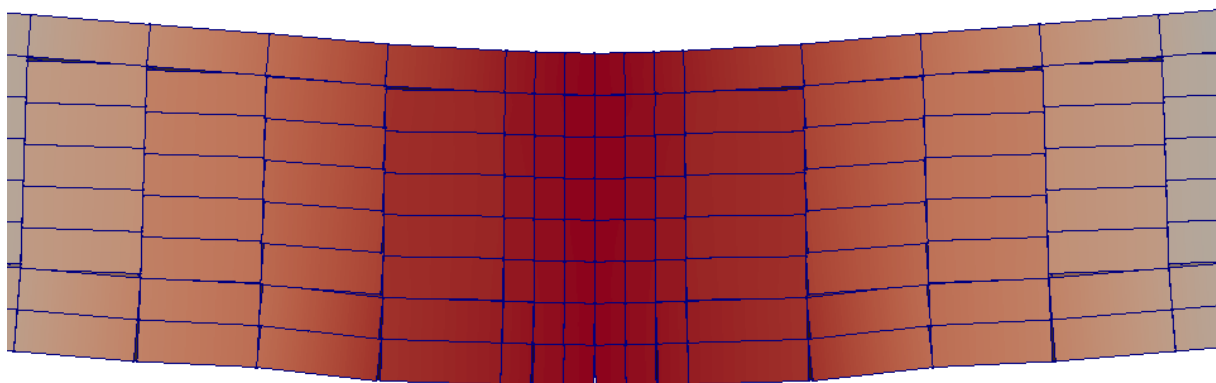


Figura 5.8 - Tensões axiais na armadura da viga A3.

A partir do modelo adotado, também foi possível analisar as deformações em toda a viga. Em todos os casos, foi verificado que, assim como era previsto, a flecha nas vigas ocorreram de forma simétrica ao longo da mesma, como pode ser observado nas Figuras 5.9, 5.10 e 5.11.

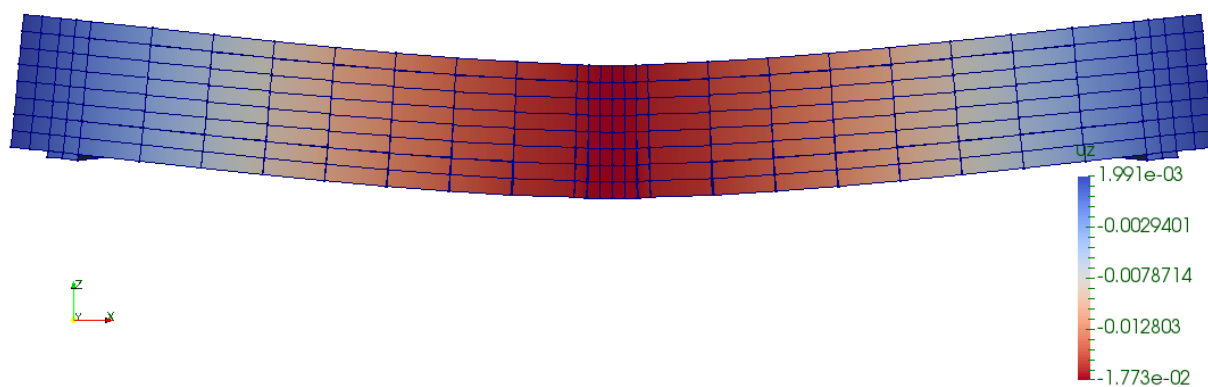


(a)

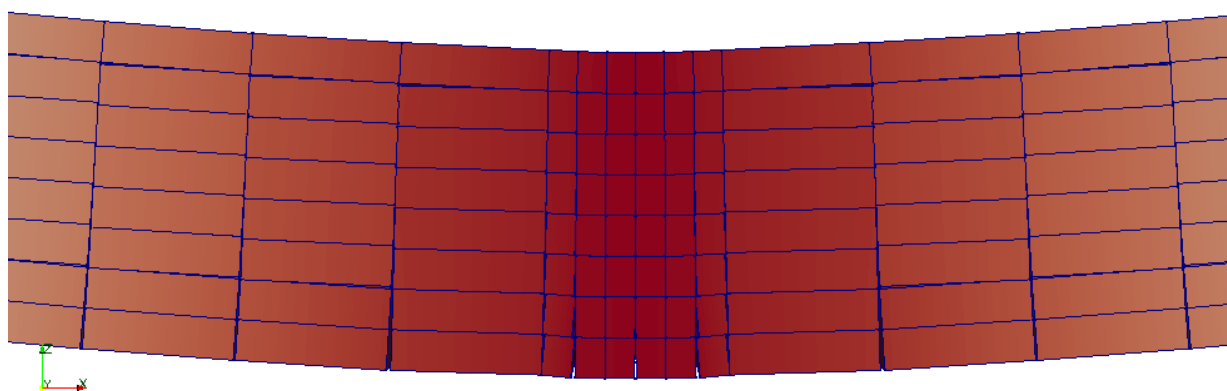


(b)

Figura 5.9 - Deslocamento u_z da viga A1(a) e detalhe das trincas (b).

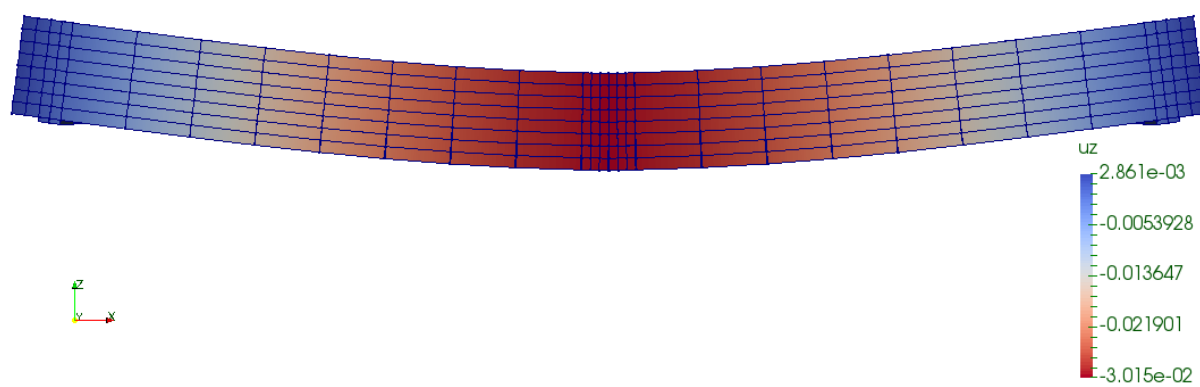


(a)

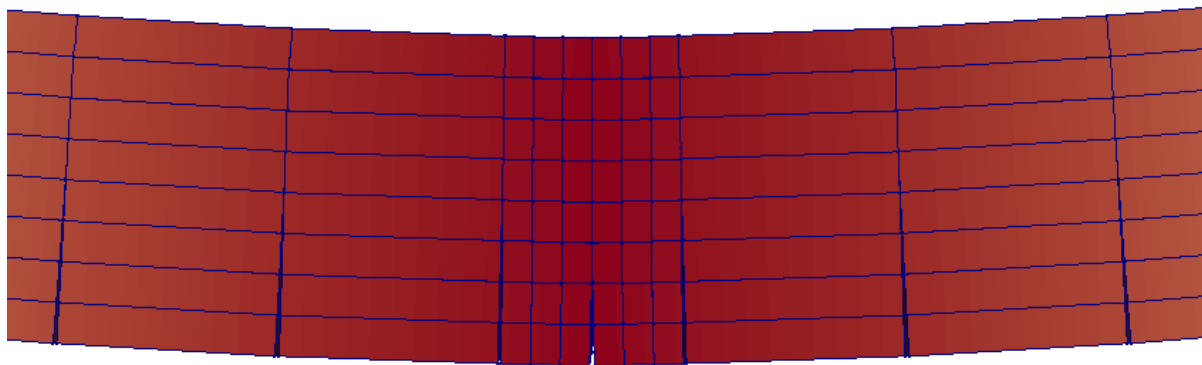


(b)

Figura 5.10 - Deslocamento u_z da viga A2(a) e detalhe das trincas (b).



(a)



(b)

Figura 5.11 - Deslocamento u_z da viga A3(a) e detalhe das trincas (b).

5.1.2 VIGA B1

A viga B1 foi submetida a uma carga de ruptura de 445 kN. O resultado numérico apresentou uma viga com comportamento mais flexível, a partir de um carregamento de cerca de 275 kN. O deslocamento correspondente à carga total aplicada foi de 15,22 mm, valor superior ao obtido experimentalmente, de 13,60 mm. A Figura 5.12 exibe o deslocamento da viga B1 para os respectivos valores de carga.

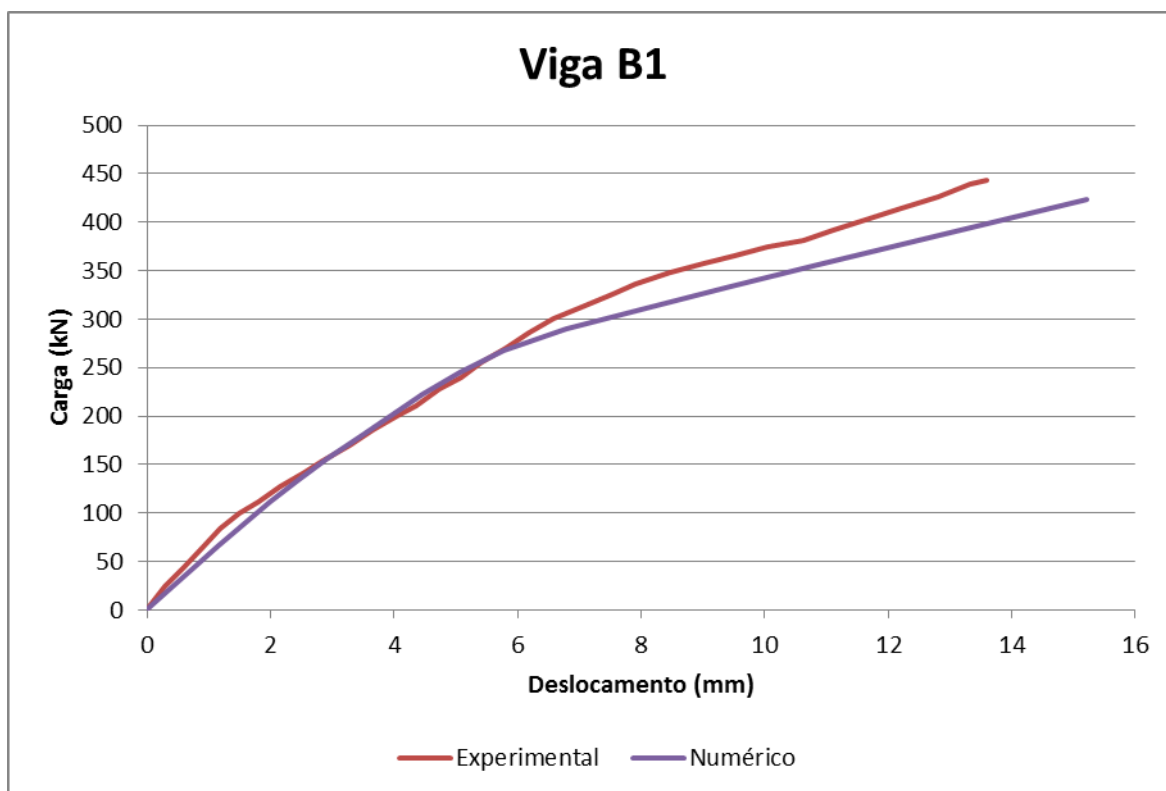


Figura 5.12 - Diagrama de carga *versus* deslocamento para a viga B1.

O padrão de abertura de trincas e de deformação da viga foi bastante semelhante ao da viga A1. O que era esperado, visto que elas se diferem apenas pela geometria da seção transversal. A viga A1 tem 307 mm de largura e a B1 231 mm.

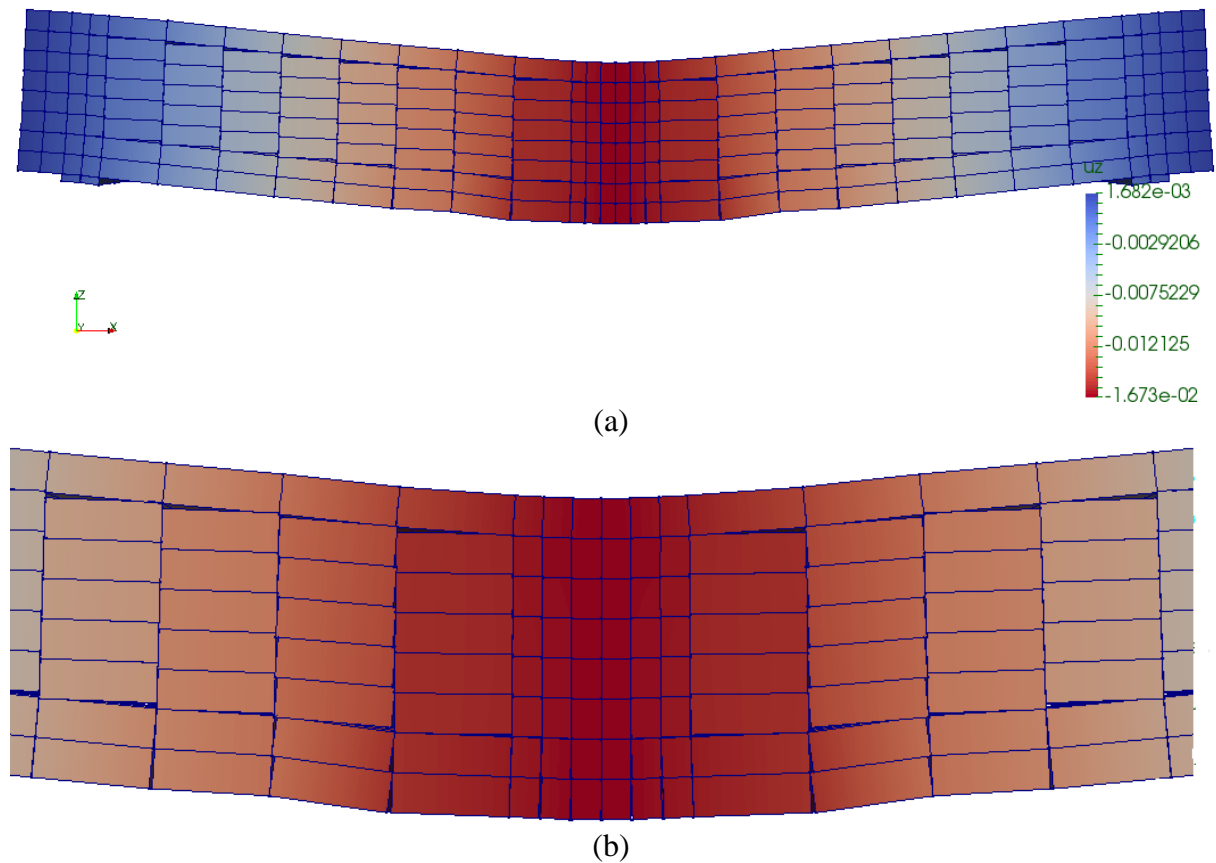


Figura 5.13 - Deslocamento u_z da viga B1(a) e detalhe das trincas (b).

É possível perceber que a armadura nas vigas B1 foram solicitadas de maneira semelhante às vigas A1 e A2. Vale destacar que os estribos foram bastante solicitados, o que é confirmado pela Figura 5.13, em que os deslocamentos dos elementos no plano da junta são visíveis e indicam a solicitação da armadura de cisalhamento (estribos).

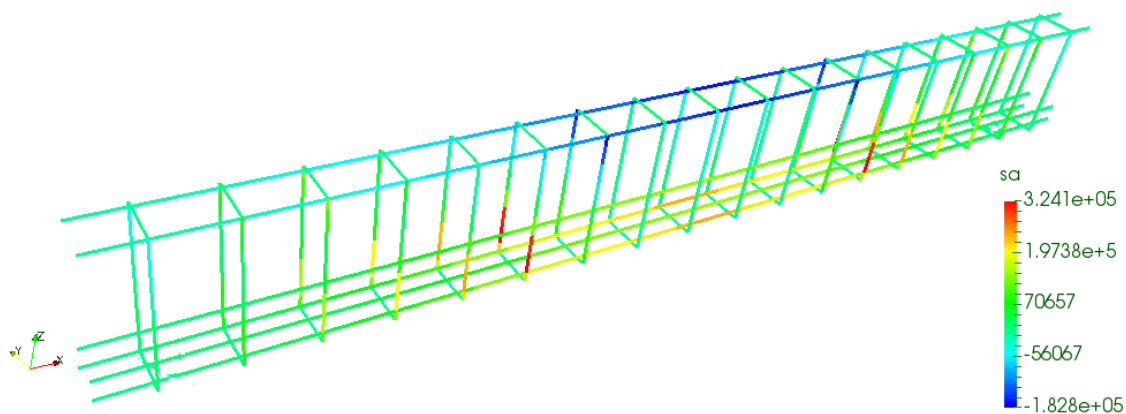


Figura 5.14 - Tensões axiais na armadura da viga B1.

5.1.3 VIGA C2

A viga C2 foi submetida a um carregamento de 325 kN, equivalente à carga de ruptura do ensaio experimental. Os resultados numéricos foram compatíveis com os experimentais durante todo o carregamento. O deslocamento máximo calculado foi de 18,33 mm, enquanto que no experimento de Bresler e Scordelis (1963) *apud* Vecchio e Shim (2004), o deslocamento máximo foi 20,05 mm. A Figura 5.15 exhibe o deslocamento da viga C2 para respectivos valores de carga.

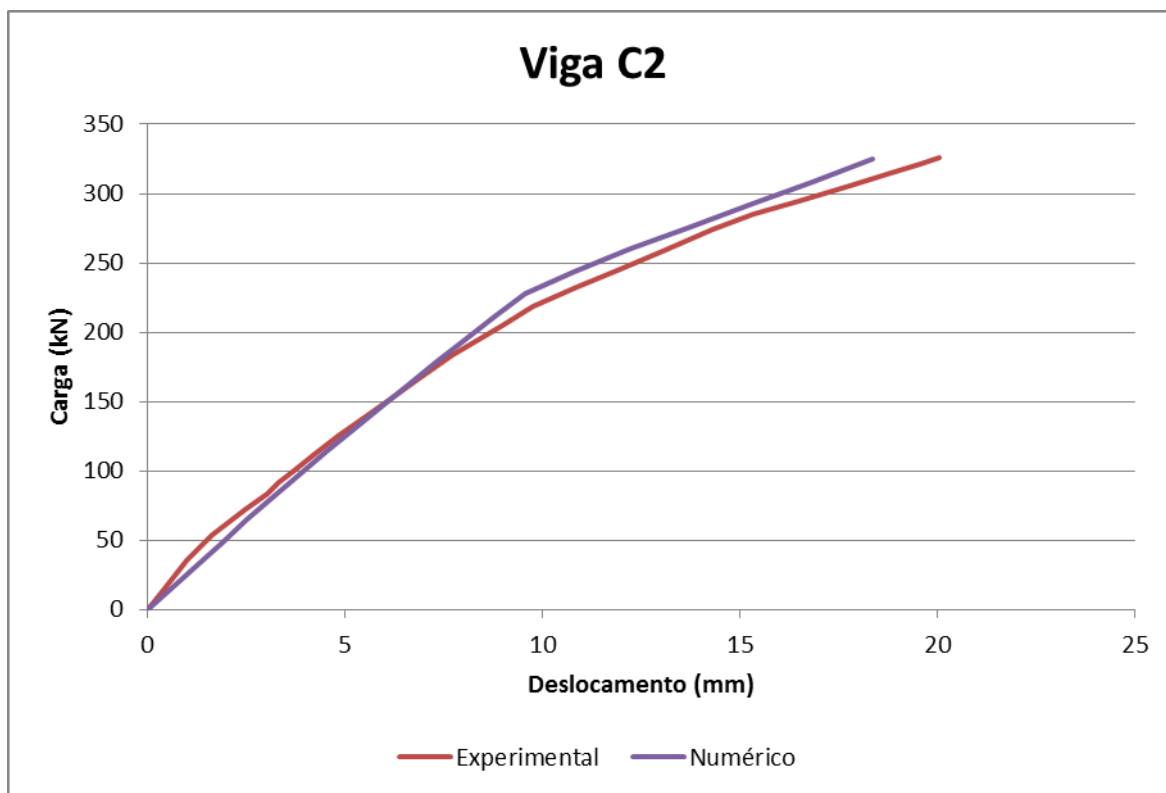


Figura 5.15 - Diagrama de carga *versus* deslocamento para a viga C2.

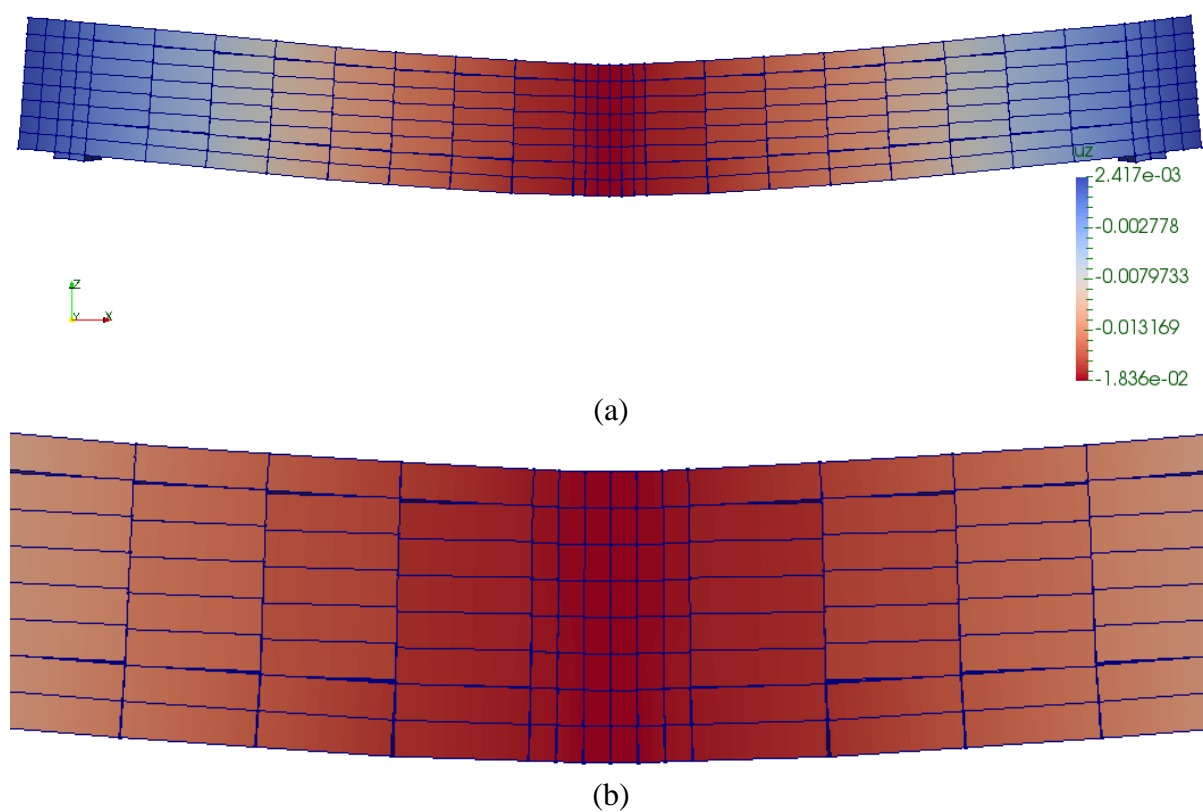


Figura 5.16 - Deslocamento u_z da viga C2(a) e detalhe das trincas (b).

Nessa viga, percebe-se que também houve uma grande mobilização dos estribos. O que igualmente é confirmado através dos deslocamentos entre os elementos de concreto no plano da junta mostrados na Figura 5.16.

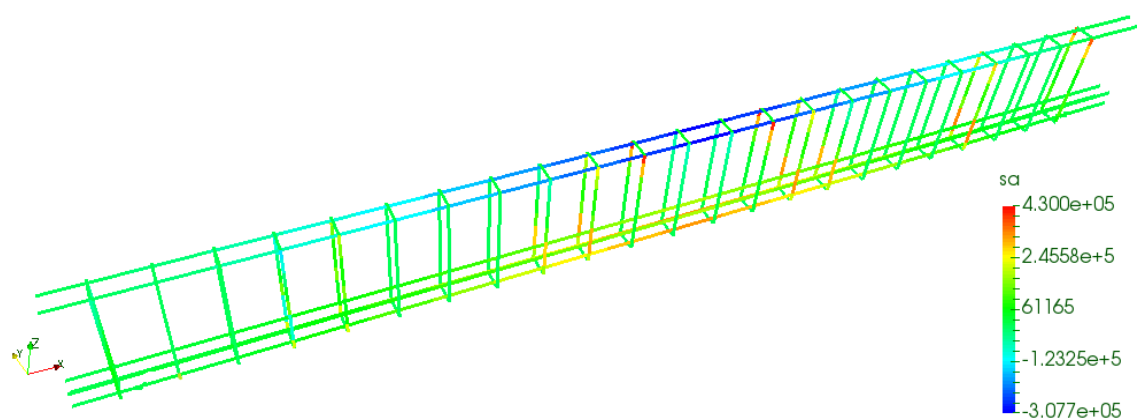


Figura 5.17 - Tensões axiais na armadura da viga C2.

5.1.4 VIGA OA1

A viga OA1 foi submetida ao carregamento de ruptura dado pelo experimento, 333 kN. O deslocamento máximo calculado foi de 7,17 mm, enquanto que no experimento de Bresler e Scordelis (1963) *apud* Vecchio e Shim (2004), o deslocamento máximo foi 6,70 mm. A Figura 5.18 exibe o deslocamento da viga OA1 para respectivos valores de carga. Os comportamentos das vigas modelada e experimental estão semelhantes em todo o carregamento, Há uma ligeira discrepância apenas a partir de um carregamento de cerca de 200 kN.

O gráfico mostrado na Figura 5.18 mostra que o comportamento da viga é quase que linear. Isso mostra que a ausência de estribos reduz a ductilidade da viga, promovendo assim, uma ruptura frágil. Desta forma o comportamento observado tende a ser linear.

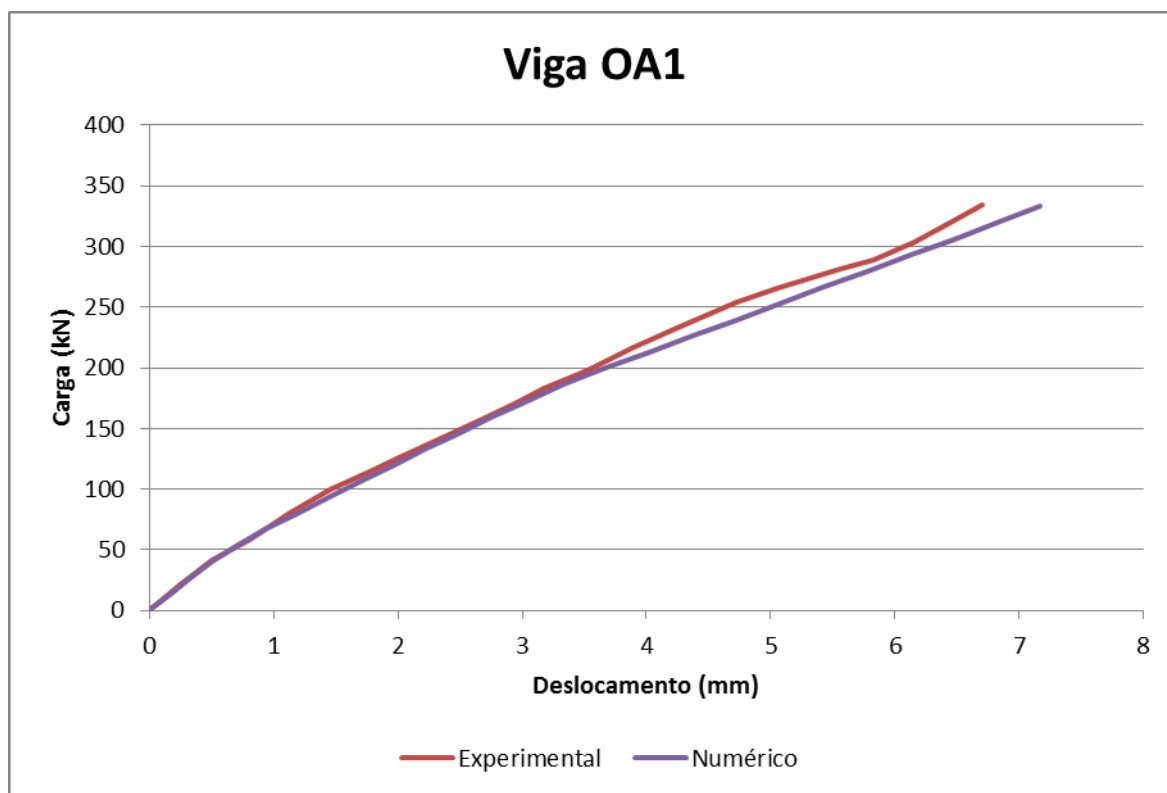
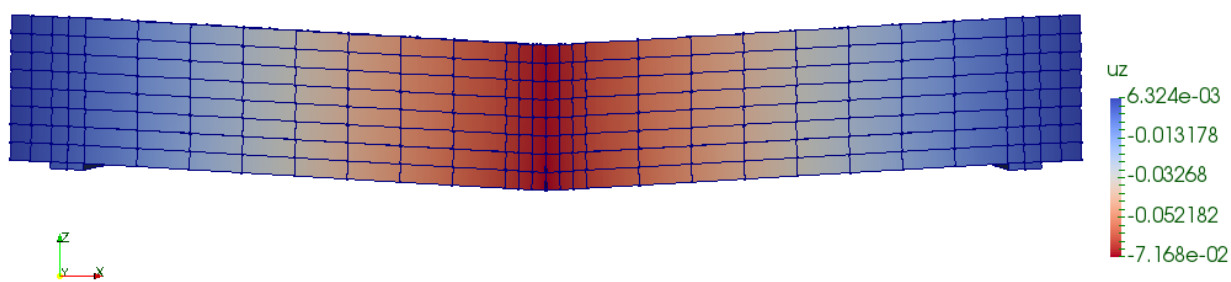
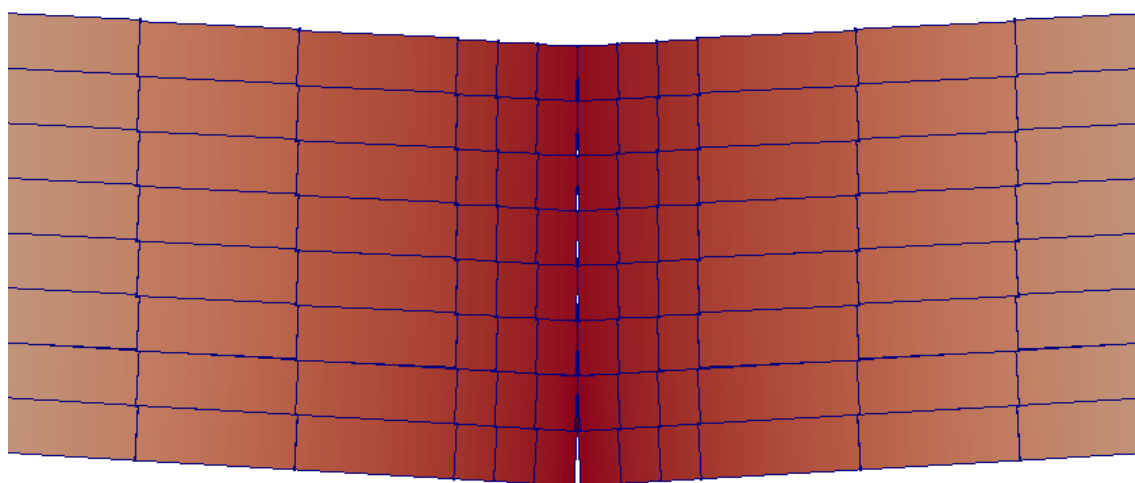


Figura 5.18 - Diagrama de carga *versus* deslocamento para a viga OA1.

A Figura 5.19 mostra que basicamente uma fissura central é prevista pelo modelo numérico.



(a)



(b)

Figura 5.19 – Deslocamento u_z da viga OA1(a) e detalhe da trinca central (b).

A tensão nas amaduras se dá de forma simétrica e como era esperado, as barras localizadas nas regiões mais inferiores foram as mais solicitadas. Entretanto, o maior valor obtido foi de 356 MPa, ou seja, inferior ao patamar de escoamento do aço.

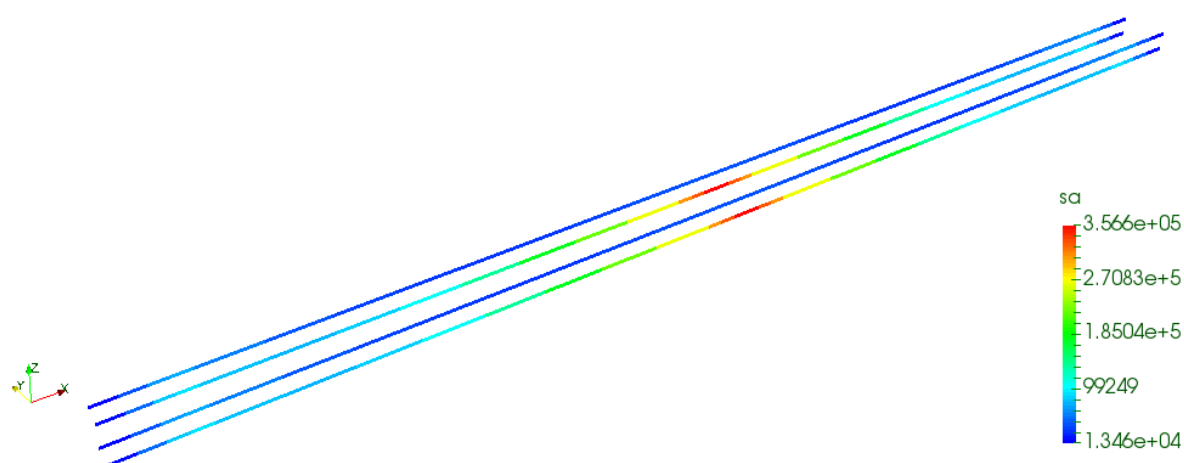


Figura 5.20 - Tensões axiais na armadura da viga OA1.

5.2 VIGAS DE LEONHARDT & WALTHER (1962)

As vigas L1 e L2 de Leonhardt & Walther (1962) foram modeladas em 11 blocos, como mostrado na Figura 5.21. Em seguida, os blocos foram divididos e formaram a malha de elementos finitos exposta na Figura 5.22.

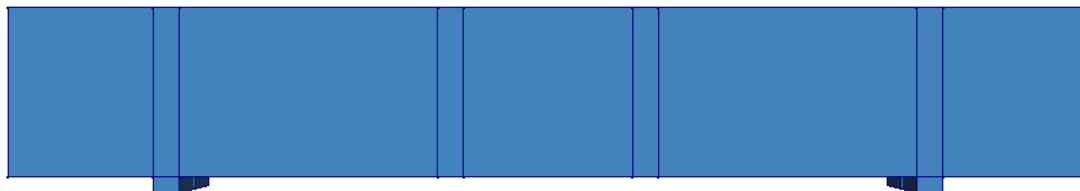


Figura 5.21 - Modelagem das vigas L1 e L2: Divisão do domínio em blocos utilizados para a discretização em elementos finitos.

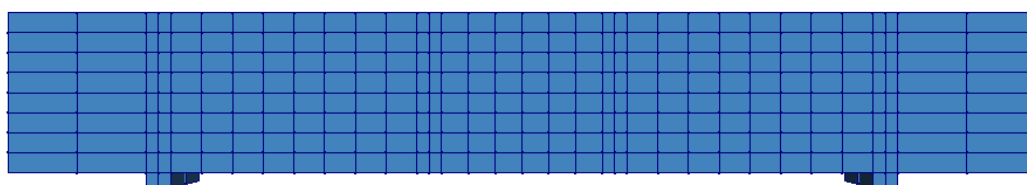


Figura 5.22 – Malha de elementos finitos das vigas L1 e L2

O ensaio de flexão a quatro pontos considera que as cargas aplicadas são pontuais. Entretanto, no experimento as cargas foram aplicadas em superfícies compostas por chapas metálicas, como mostrado na Figura 4.3. Isto posto, nesse trabalho, o carregamento foi considerado como distribuído nas regiões das placas.

O carregamento adotado na análise foi adotado com base na carga de ruptura fornecida pelos experimentos. A carga foi aplicada por meio de 20 incrementos até atingir o valor total e, a cada incremento, o deslocamento no centro da parte inferior da viga era medido. Os carregamentos adotados para cada viga estão descritos na tabela abaixo.

Tabela 5.2 – Carregamentos adotados nas vigas L1 e L2

Viga	Carga (kN)
L1	117,7
L2	58,9

De acordo com a descrição do ensaio feita por Kabele *et al.* (2010) e Malm (2006), o módulo de Young correspondente a armadura (Es) foi de 208 GPa com tensão de escoamento igual a 560 MPa.

Depois de modeladas, as vigas foram analisadas de modo a calibrar os parâmetros. Depois de algumas tentativas, percebeu-se, para as para os mesmos parâmetros, os resultados obtidos para as vigas de Leonhardt & Walther (1962) eram compatíveis com os resultados experimentais. Os parâmetros utilizados estão listados abaixo e deve-se observar que alguns deles são diferentes dos utilizados na análise da vigas Bresler e Scordelis (1963).

$$\delta_c = 160 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$p_0 = 2,0 \text{ kPa}$$

$$k_s = 1 \times 10^8 \text{ kPa/m}$$

5.2.1 VIGA L1 E L2

Nos gráficos comparativos mostrados na Figura 5.24, é possível notar que, mesmo com os esforços para a calibração de parâmetros que representassem bem o comportamento das duas vigas, isso não ocorreu. Os resultados numéricos e experimentais não tiveram uma boa correlação. Isso deu-se de maneira mais visível na viga L1. A previsão de deslocamento final, entretanto, forneceu resultados razoáveis.

É importante notar que os resultados não estão apenas discrepantes em termos de deslocamentos absolutos. Há também uma disparidade entre os comportamentos das vigas experimentadas por Leonhardt & Walther (1962) e das numericamente modeladas. No primeiro caso, o comportamento não-linear das vigas é claro, enquanto que no segundo caso, identifica-se um comportamento quase que elástico-linear.

Pode-se perceber, através da análise numérica do comportamento das vigas L1 e L2, que, assim como na viga A1 de Bresler & Scordelis (1963), a ausência de estribos promove uma ruptura frágil da viga. Com tal característica o comportamento observado tende a ser linear.

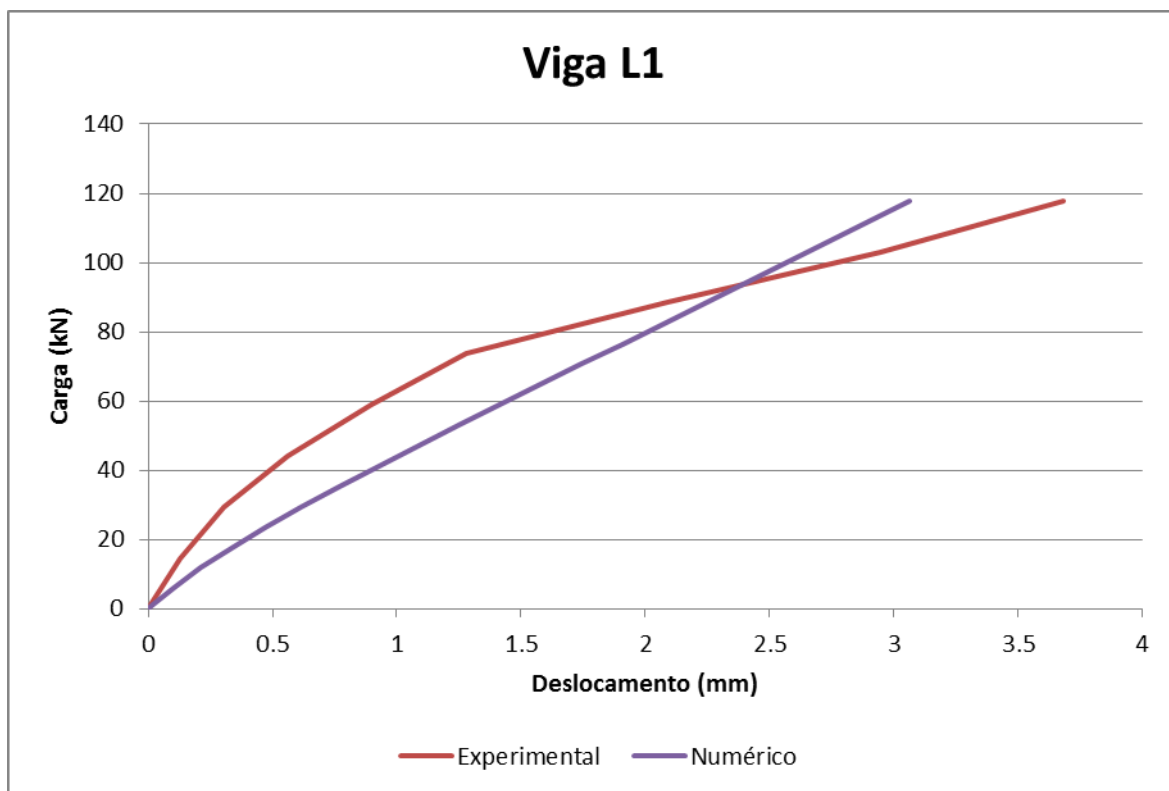


Figura 5.23 - Diagrama de carga *versus* deslocamento para a viga L2.

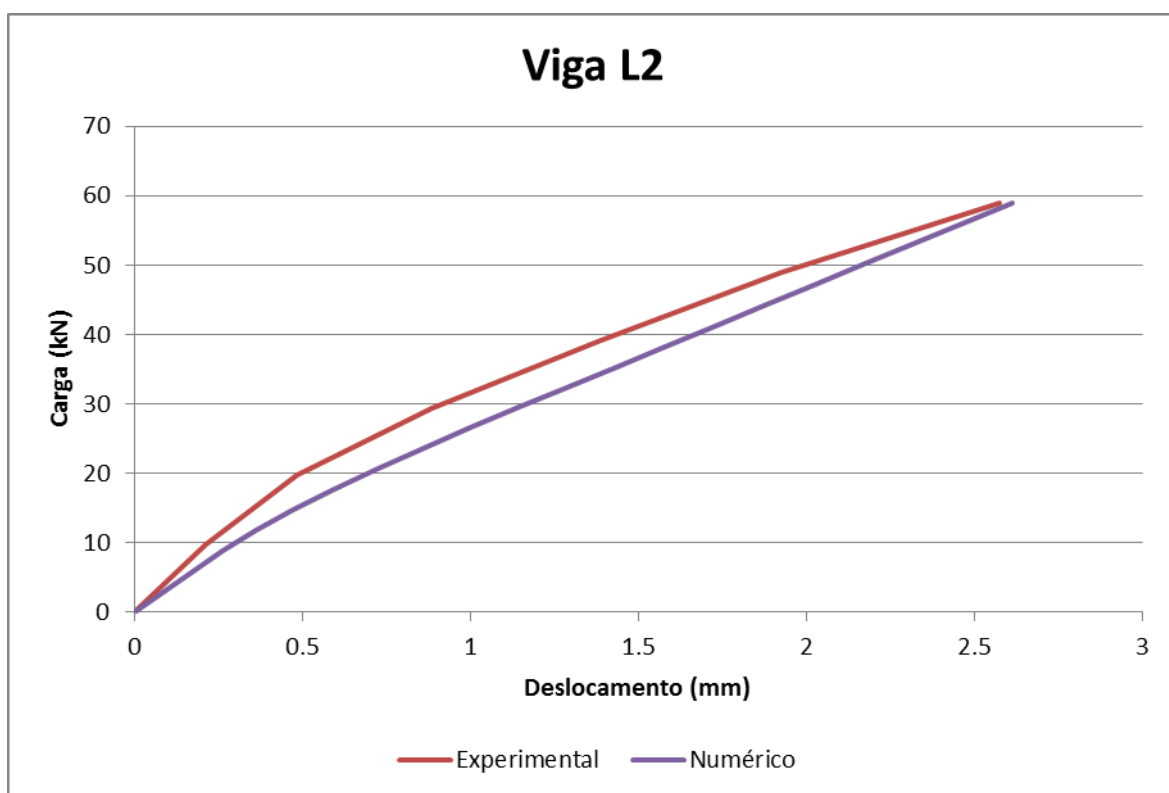


Figura 5.24 - Diagrama de carga *versus* deslocamento para a viga L2.

Pelas Figuras 5.25 e 5.26, é possível notar que praticamente não há trincas. Ou seja, o modelo adotado não conseguiu prever as trincas que ocorreram nas vigas L1 e L2 e, conseqüentemente, o prognóstico de comportamento não-linear da viga ficou comprometido.

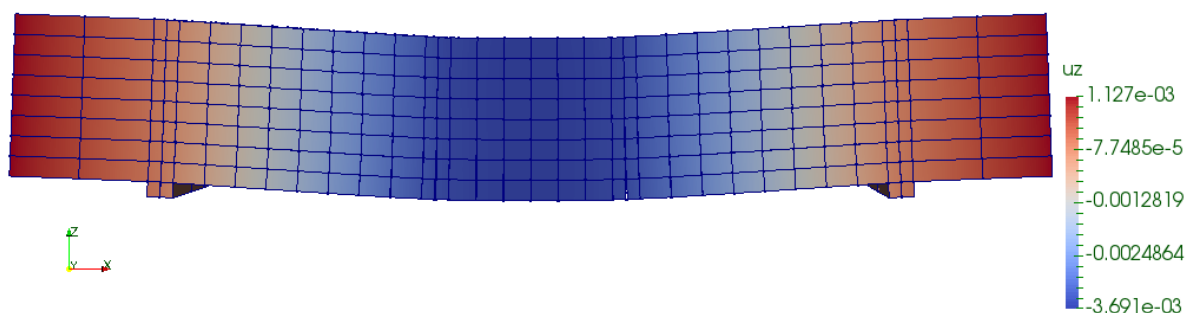


Figura 5.25 - Deslocamento u_z da viga L1 (comprimento de 1,45 m).

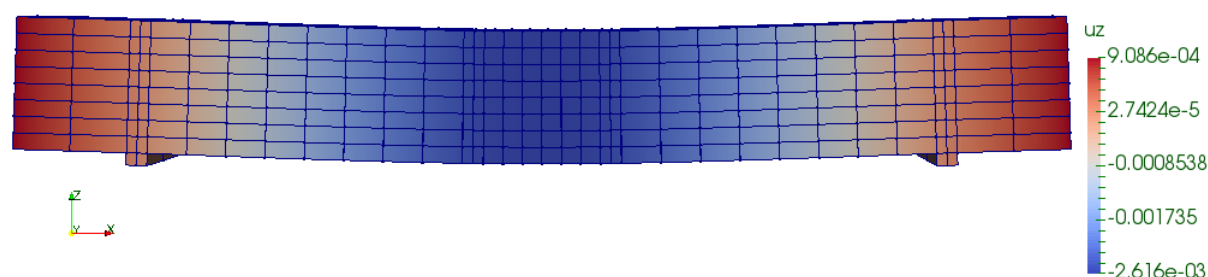


Figura 5.26 - Deslocamento u_z da viga L2 (comprimento de 1,95 m).

As tensões nas vigas L1 e L2 foram simétricos ao longo da vida, assim como era esperado. As armaduras, entretanto, foram solicitadas de maneira diferente. O modelo numérico previu tensões de 147 MPa na viga L1 e de 208 MPa, valores ainda distantes da tensão de escoamento da armadura, que é de 560 MPa.

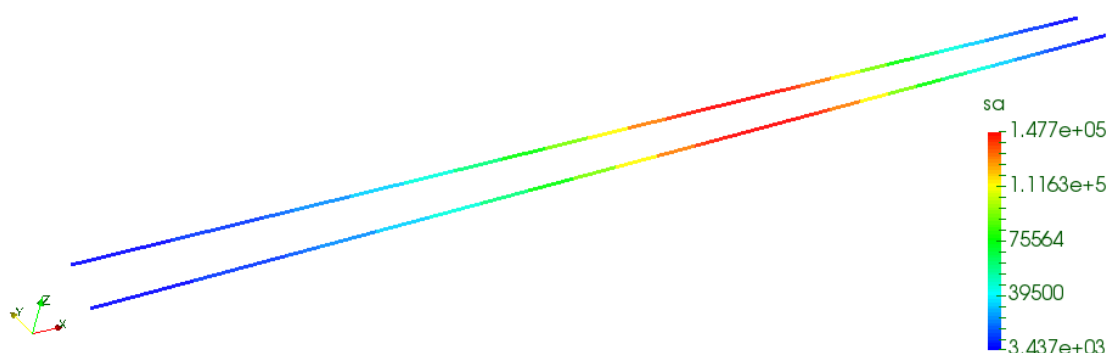


Figura 5.27 - Tensões axiais na armadura da viga L1.

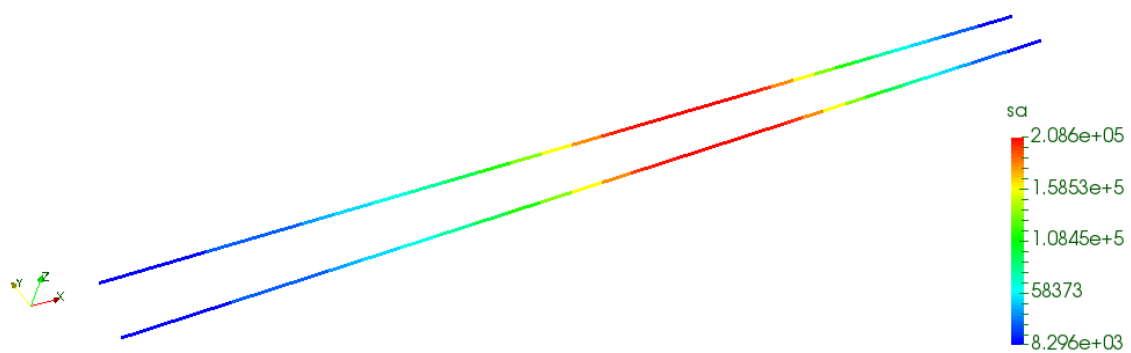


Figura 5.28 - Tensões axiais na armadura da viga L2.

6 CONCLUSÕES

O desenvolvimento do trabalho se deu a partir da avaliação numérica, a partir do método dos elementos finitos, de ensaios experimentais consagrados. Durante o desenvolvimento do trabalho, vários ajustes foram necessários e realizados visando sempre a finalidade do estudo e levando em conta a complexidade dos problemas. De maneira geral, pode-se considerar que as análises foram bem-sucedidas, uma vez que a maioria das vigas modeladas tiveram um comportamento bem próximo das vigas experimentais e quando isso não ocorreu, as divergências foram explicadas de maneira racional e sensata.

O método semi-embutido, de modelagem das barras atravessando um elemento sólido, se mostrou extremamente versátil e eficiente. Ele permite modelar e verificar o comportamento da interface, além dos estudos das próprias barras, como deslocamentos e distribuição de tensões e tem inúmeras aplicações em diversas áreas além da Engenharia Civil.

O modelo adotado para o elemento de junta na interface concreto-concreto também apresentou bons resultados, dentro das limitações impostas ao modelo numérico. É possível que os resultados possam ser melhorados a partir da implementação da possibilidade de ruptura por cisalhamento nas juntas.

A disparidade entre os resultados, é justificada pela simplificação adotada na modelagem da junta presentes na interface concreto-concreto. Essa simplificação faz com o as trincas ocorram apenas devido a esforços axiais, e não cortantes. Dessa maneira, a modelagem prevê um menor nível de fissuração do que a realidade e, conseqüentemente, a rigidez global é reduzida em menor grau, se comparada com os ensaios experimentais.

Nas análises numéricas também foi verificado que, assim como era esperados, a presença de armadura confere maior ductilidade às peças de concreto armado. Assim, em casos em que não havia presença de estribos, por exemplo, notou-se que a ruptura dessas vigas foi frágil.

Este trabalho ilustra o processo de validação de modelos numéricos seguindo resultados experimentais e teóricos. O objetivo, de aplicar métodos numéricos e aprofundar o entendimento do comportamento dos materiais em situações de cunho prático, foi cumprido com êxito.

BIBLIOGRAFIA

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 (2014), “*Projetos de estruturas de concreto - procedimento*”, Rio de Janeiro, 238 p.

AZEVEDO, A. F. M., (2003), “*Método dos Elementos Finitos*”. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1ª Ed. Porto, Portugal, 258 p.

BASTOS, P. S. S. (2015), “*Flexão normal simples - vigas*”, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade De Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Bauru, São Paulo, Brasil, 78 p.

CLÍMACO, J. C. T. DE SOUZA (2005), “*Estruturas de Concreto Armado – Fundamentos de Projeto, Dimensionamento e Verificação*”. FINATEC, UnB, Brasília, Brasil, 410 p.

DEL RÍO, J. D.; *Aplicação do Método de Elementos Finitos Semi-Embutidos na Simulação de Vigas de Concreto Armado*. Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM-006A/15, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília. Brasília, DF, 100p.

DURAND, R. (2008), “*Análise tridimensional de estruturas geotécnicas submetidas a reforço e drenagem*”. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 176 p.

DURAND, R. & FARIAS M.M. (2012), “*Nonlinear joint element for the analysis of reinforcement bars using finite elements*”. World Congress in Computational Mechanics, São Paulo, Brasil, 16 p.

GESUALDO, F. A. R. (2010), “*Notas de Aula: Método dos Elementos Finitos*”. Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil, 53 p.

GONTIJO, R. (2013). Comparação do dimensionamento de vigas de concreto armado atendendo à norma NBR 6118:2003 com análise por elementos finitos. Monografia de Projeto Final, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 82 p.

- HARTL, H. (2002). *“Development of a continuum-mechanics-based tool for 3D finite element analysis of reinforced concrete structures and application to problems of soil structure interaction”*. PhD Thesis, Graz University of Technology, Graz, Austria, 250 p.
- HORDIJK, D. A. (1992), *“Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete; experiments, modelling and analyses”*. HERON, Vol. 37, 79 p.
- KABELE, P., ČERVENKA, V., e ČERVENKA, J. (2010), *“Example Manual ATENA Engineering”*. Prague: Červenka Consulting s.r.o. 90 p.
- KWAK, H.G. & FILIPPOU, F. C. (1990), *“Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads”*. Report No. UCB/SEMM-90/14, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, USA, 124 p.
- LAZZARI, P.M., FILHO A.C. & LOPES F.P.S. (2014), *“Análise Estrutural Não Linear de Vigas em Concreto Armado Utilizando o ANSYS 14.5”*. VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, Rio de Janeiro, Brasil, 10 p.
- LI, K. & KALIAKIN, V. N (1993), *“Numerical simulation of interfaces in geomaterials: Development of New Zero-Thickness Interface Elements”*. Civil Engineering Report No. 93-6, Department of Civil Engineering, University of Delaware, Newark, USA, 94 p.
- MACIEL, R. M. C. A. (2013) *“Método dos elementos finitos aplicado à análise de sólidos: concepção e implementação”*. Dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica De Lisboa, Lisboa, Portugal, 159 p.
- MALM, R. (2006). *“Shear cracks in concrete structures subjected to in-plane stresses”*. Royal Institute of Technology, Department of Civil and Architectural Engineering, Stockholm, Sweden, 148 p.
- MANZOLI, O. L., GAMINO, A. L., RODRIGUES E. A. & CLARO G. S. K. (2012), *“Modeling of interfaces in two-dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio”*. Computers and Structures 94–95, p. 70–82.

MARTHA, L. F. (1994), "*Notas de aula do curso CIV 2118 – método dos elementos finitos*", Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 48 p.

MUNJIZA, A.; ANDREWS, K. R. F. & WHITE, J. K. (1999), "*Combined single and smeared crack model in combined finite-discrete element analysis*". International Journal For Numerical Methods In Engineering 44, p. 41-57.

VECCHIO F. J., SHIM W. (2004) "*Experimental and analytical reexamination of classic concrete beam tests*". Journal of Structural Engineering 130.3 p. 460-469.

ZIVALJIC, N., NIKOLIC, Z., SMOLJANOVIC, H. (2012), "*A combined finite-discrete element model for RC structures under dynamic loading*". Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, Vol. 30, No 7, p. 982-1010.

ZIVALJIC, N., NIKOLIC, Z., SMOLJANOVIC, H. (2014), "*Computational aspects of the combined finite–discrete element method in modelling of plane reinforced concrete structures*". Engineering Fracture Mechanics 131 p. 669–686.